MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académie de Créteil

Exercices académiques

Exercice 1 : le tri

On rappelle la formule suivante donnant la somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

n jetons distincts numérotés de 1 à n sont alignés aléatoirement de gauche à droite. On souhaite les trier dans l'ordre croissant.
Par exemple, on souhaite trier cinq jetons ($n = 5$) : $3 - 1 - 4 - 5 - 2$ => $1 - 2 - 3 - 4 - 5$

On ne peut déplacer les jetons qu'en échangeant les places de deux jetons adjacents (côte à côte).

Exemples dans le cas où $n = 3$

On souhaite trier 3-1-2. $3 - 1 - 2$ => $1 - 3 - 2$ (on échange 3 et 1) => $1 - 2 - 3$ (on échange 2 et 3) 2 échanges ont été effectués.	On souhaite trier 3-2-1. $3 - 2 - 1$ => $3 - 1 - 2$ => $1 - 3 - 2$ => $1 - 2 - 3$ 3 échanges ont été effectués. On remarque qu'il était impossible d'échanger directement le 1 et le 3 pour passer de 3-2-1 à 1-2-3 car les jetons 1 et 3 n'étaient pas adjacents.

Pour chaque jeton on définit le nombre appelé « inversion » du jeton, qui correspond au nombre de jetons qui sont placés à sa droite et qui lui sont inférieurs.
On définit le « mélange de l'ensemble des jetons » comme étant la somme des inversions de chacun des jetons.

Pour les questions 1 et 2 on s'intéresse à 4 jetons dans la situation initiale : $\mathbf{4 - 3 - 1 - 2}$

1. Proposer deux manières différentes de trier en 5 échanges les jetons.
2. On cherche à montrer que dans cette situation initiale, il n'existe pas de tri en moins de 5 échanges.
   a) Justifier que le « mélange de l'ensemble des jetons » pour cette situation initiale 4-3-1-2 est de 5.
   b) Expliquer pourquoi dans ce cas, il n'existe pas de tri en moins de 5 échanges.
   c) Expliquer pourquoi il ne faut pas commencer le tri en cherchant à mettre le jeton 2 à sa place.

Pour les questions suivantes on s'intéresse au tri de n jetons où n est un entier naturel supérieur à 2.

3. a) Montrer que si le « mélange de l'ensemble des jetons » est égal à k, alors il faudra au moins k échanges pour trier les jetons.

   b) Montrer que le nombre minimum d'échanges pour trier les jetons est égal au « mélange de l'ensemble des jetons ».

Dans la suite du sujet, on se place dans le cas où le nombre d'échanges effectués pour trier les jetons est minimal.

   c) Ecrire un algorithme qui permet de trier l'ensemble des n jetons en M échanges, où M est le « mélange de l'ensemble des jetons ».

4. a) Soit M le « mélange d'un ensemble de n jetons ». Montrer que $0 \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

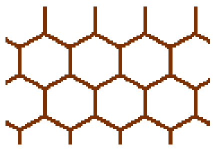
   b) Dans quelle disposition de départ des jetons le nombre d'échanges minimal pour les trier sera le plus grand ?

5. a) Dans le cas $n = 4$, donner toutes les dispositions de départ des jetons et en déduire le nombre moyen d'échanges qui seront nécessaires au tri.

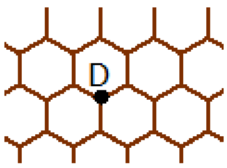
   b) Déterminer le nombre moyen d'échanges nécessaires au tri des n jetons.

Exercice 2 : promenade dans la ruche

On considère un quadrillage hexagonal, appelé nid d'abeille dans le langage courant, et réseau hexagonal en langage mathématique.
Ce réseau est constitué de « points » appelés sommets et de « liens » entre ces points appelés arêtes.



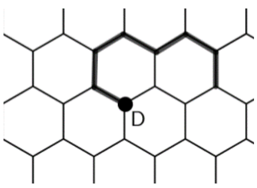
On choisit un sommet de ce quadrillage, noté D. On place un pion sur ce sommet.



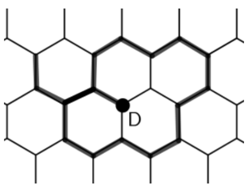
Après n déplacements le long de n arêtes du réseau au hasard, on dit que la trajectoire du pion est un chemin de longueur n.
Si le pion effectue n déplacements, en ne repassant jamais deux fois sur le même sommet, on dit que la trajectoire du pion est un chemin auto-évitant de longueur n.

1) Sur les quadrillages ci-dessous sont représentés des chemins partant du sommet D. Pour parcourir un chemin en entier, il faut passer sur l'ensemble des arêtes noires surlignées.
Pour chacun des chemins ci-dessous, préciser la longueur (minimale) et s'il peut être un chemin auto-évitant.

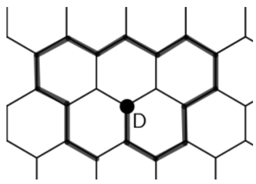
a)



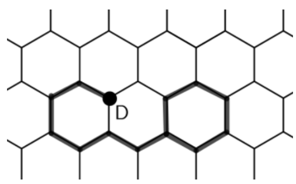
b)



c)

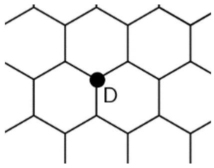


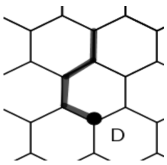
d)

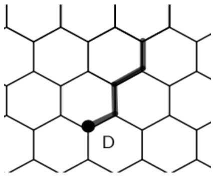


2) On se place sur le réseau hexagonal et on note a_n le nombre de chemins de longueur n partant du sommet D.
   a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.
   b) Déterminer une expression de a_n, pour tout entier naturel n non nul . Justifier.

3) Dans cette question, on place D comme ci-contre :
On note b_n le nombre de chemins partant de D, composés uniquement de déplacements « vers le haut » (voir les exemples ci-dessous).



Exemple 1 : 

Exemple 2 : 

a) Calculer $b_1,\ b_2,\ b_3$.
b) Déterminer une expression de b_n pour tout entier naturel n non nul (on distinguera les cas n pair et n impair).
c) Ces chemins sont-ils tous auto-évitants ?

4) On note c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n partant du sommet D.
a) Déterminer c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.
b) Quelle conjecture peut-on en déduire sur le terme général c_n ?
c) Déterminer c_6. La conjecture précédente est-elle valide ?

5) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^{\frac{n}{2}} \leq c_n \leq 3^n$.
b) Pour un entier n non nul donné, on suppose les a_n chemins distincts numérotés de 1 à a_n .
On considère l'algorithme suivant :

Choisir un sommet de départ pour le pion
$C \leftarrow 0$
Pour i allant de 1 à a_n :
    Marquer tous les sommets du réseau comme non visités
    Remettre le pion sur le sommet choisi comme point de départ et marquer ce sommet comme visité
    Pour j allant de 1 à n :
        Effectuer le j^ième déplacement du chemin numéro i
        Marquer le sommet où se trouve le pion comme visité
    Fin Pour
    Si aucun des sommets n'a été visité plusieurs fois :
        $C \leftarrow C + 1$
    Fin Si
Fin Pour

Qu'affiche cet algorithme pour $n = 5$?

Remarque : l'algorithme précédent fonctionne pour de petites valeurs de n, mais son fonctionnement serait trop coûteux et nécessiterait trop de temps pour de grandes valeurs de n.

Afin de faire des recherches, on pourra se servir de ce pavage :