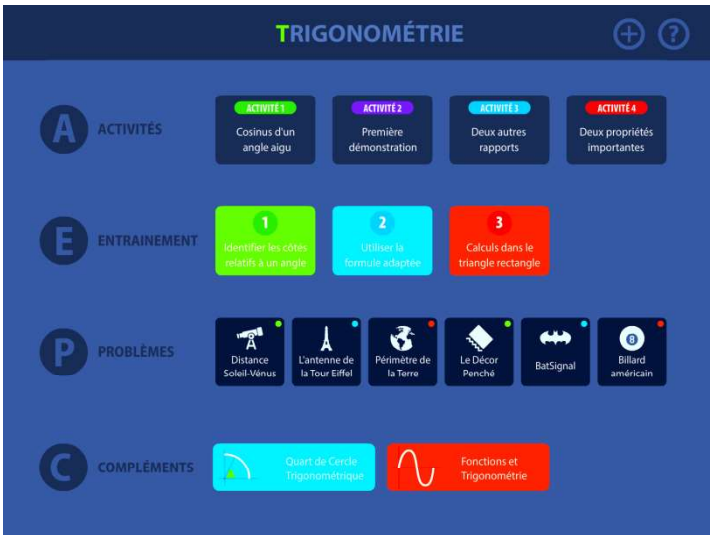
I – Dispositifs pédagogiques

A. La démonstration en mathématiques avec le numérique

Loïc ASIUS – Collège Liberté de Drancy (93)
Niveau : 3ème
Durée : 2 séances
pix 1.2.Gérer des données



L'application Trigonométrie https://huit.re/trigo-dijon de Christophe Auclair, enseignant de l'académie de Dijon, contient des activités d'introduction aux différentes notions de la trigonométrie, des exercices d'entraînement, des problèmes du type tâche à prise d'initiative, mais aussi, et c'est là qu'elle diffère des autres applications du même auteur, de situations de démonstrations de certaines propriétés liées à la trigonométrie.

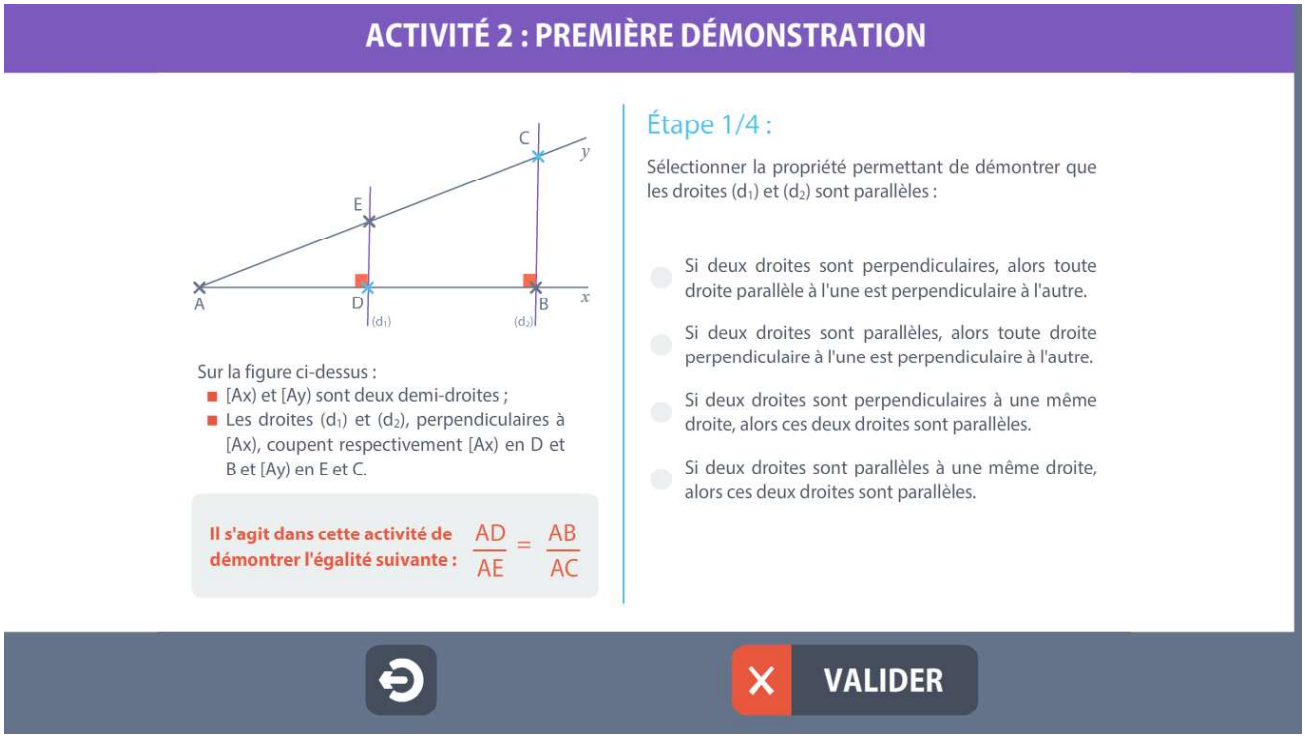
Les activités de démonstration dans cette application sont guidées pas à pas. Chaque phase est une étape au cours de laquelle l'élève doit déplacer des étiquettes pour les mettre dans le bon ordre, choisir la bonne propriété permettant de passer à l'étape suivante ou bien encore cliquer sur le facteur d'une multiplication pour simplifier une fraction.
Lorsque l'élève est en difficulté, l'application ne l'oriente pas et le laisse réessayer sans lui donner de pistes de solutions. Cela a l'avantage de laisser pleinement sa place au professeur qui peut intervenir au cas par cas selon les étapes pour aider les élèves et remédier ainsi avec eux aux difficultés qu'ils rencontrent lors de la mise en œuvre de telle ou telle démonstration. Ou bien, cela contraint l'élève à un feedback sur la notion, propriété, théorème pour l'étape sur laquelle il est bloqué.
Le professeur identifie ainsi clairement quelle(s) étape(s) selon les élèves constitue(nt) un frein au raisonnement. Des ateliers de remédiation peuvent alors être proposés avant de continuer et de terminer la démonstration en cours.
Cette démarche va être détaillée à travers deux des trois situations de démonstrations qui sont proposées dans l'application.

Première démonstration : Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

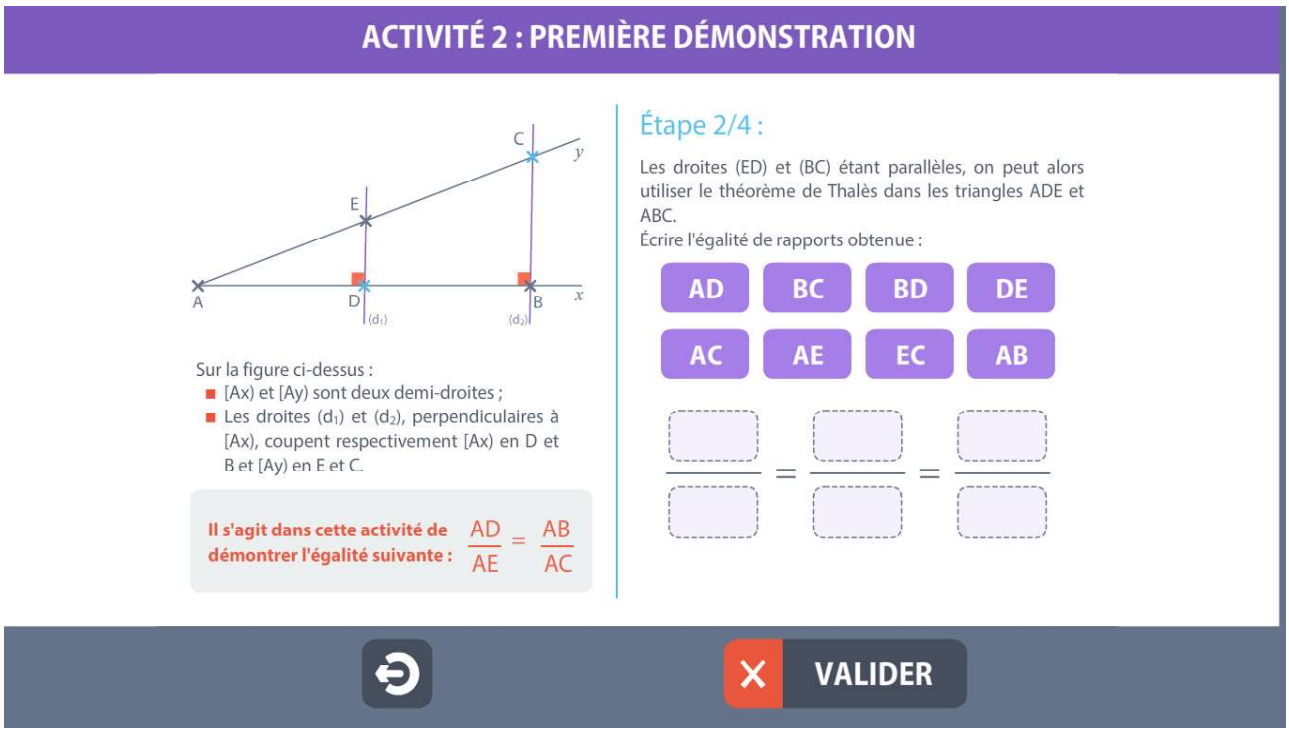
L'objectif de cette première activité de démonstration est clairement annoncé : il s'agit de démontrer l'égalité $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ à partir de la figure donnée.

Cette démonstration est découpée en 4 étapes :
1. Démontrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.
2. Écrire l'égalité des rapports liés au théorème de Thalès.
3. Écrire l'égalité des produits en croix qui en découle.
4. Simplifier les écritures fractionnaires pour aboutir à l'égalité souhaitée.

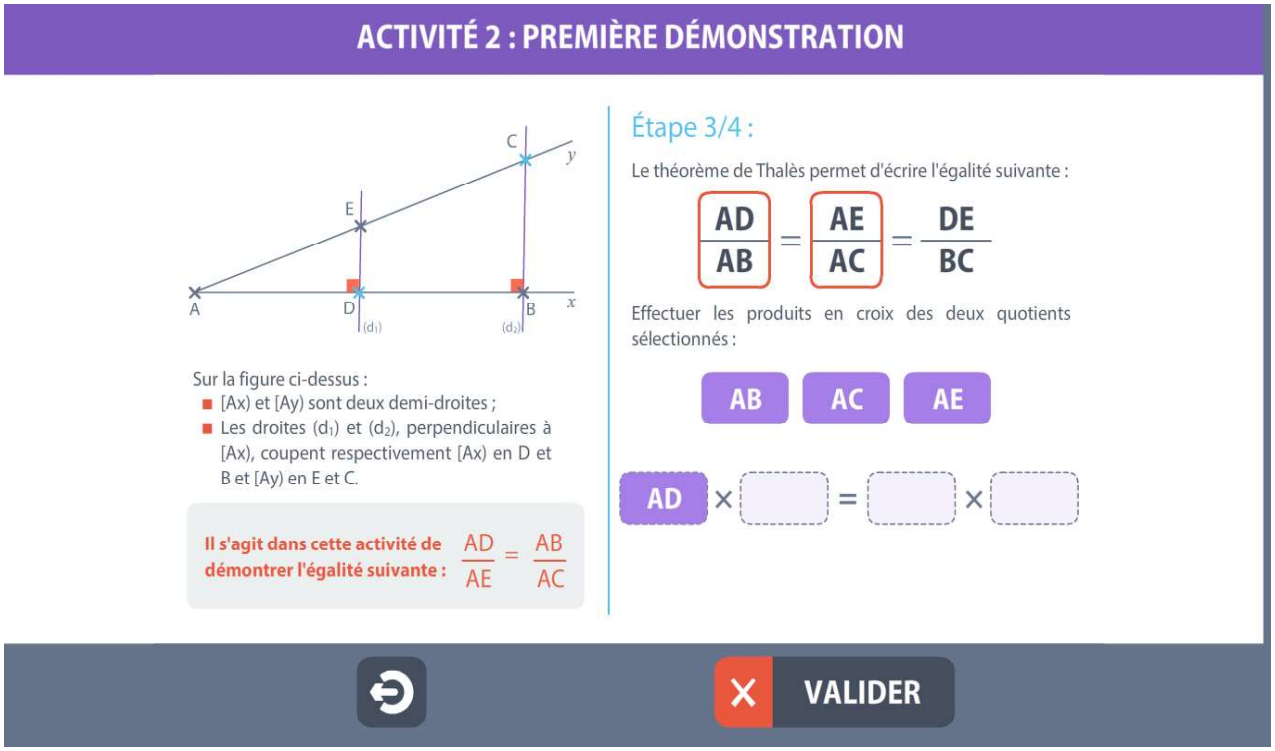
1. La première étape consiste à démontrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles. L'élève pour cela est amené à choisir la bonne propriété permettant de justifier que ces deux droites sont parallèles.
On a donc une situation de QCM dans laquelle il n'est pas laissé de liberté à l'élève. On pourrait penser qu'un élève de fin de cycle 4 puisse expliquer que les deux triangles AED et ABC sont semblables car ayant deux paires d'angles égaux et aboutir ensuite à l'égalité des rapports des longueurs de ces deux triangles sans forcément évoquer le parallélisme des droites et le théorème de Thalès.



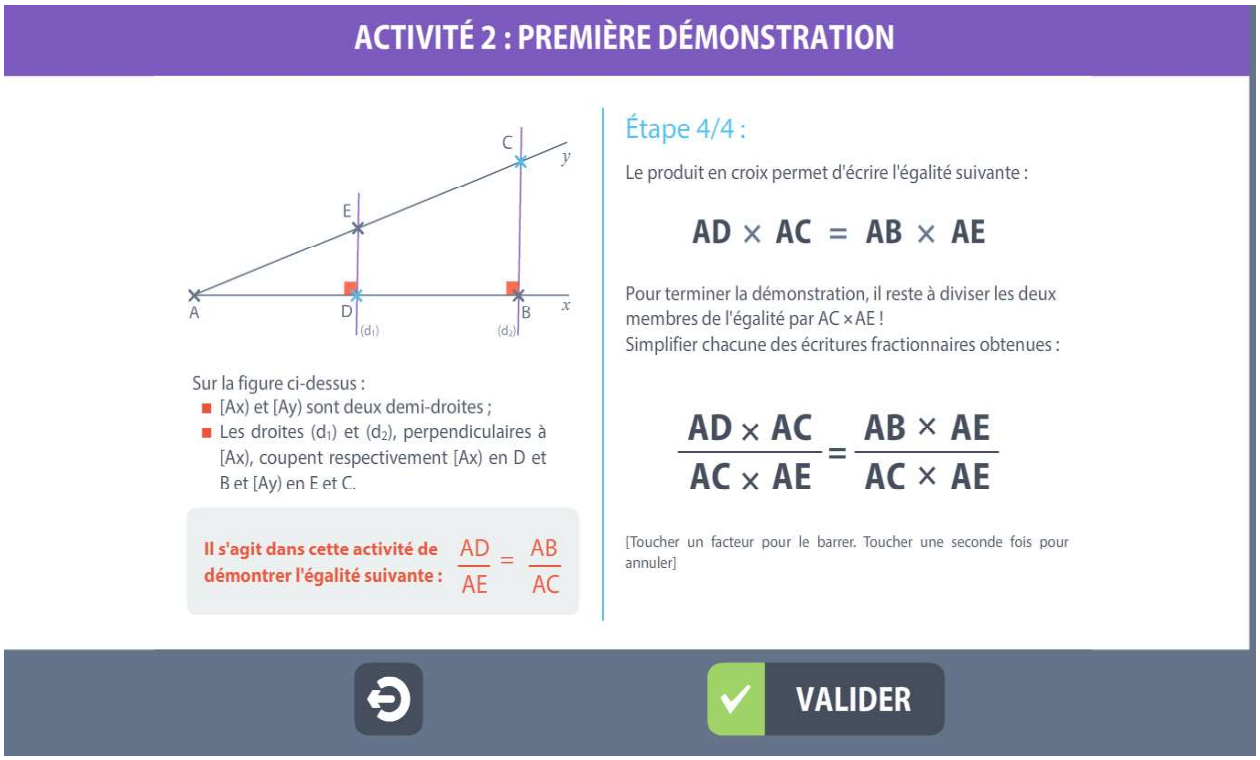
2. La deuxième étape consiste à écrire l'égalité des rapports découlant du théorème de Thalès. L'élève est invité à replacer les bonnes étiquettes dans le bon ordre.
En cas d'erreur, un message lui indique que ce qu'il a fait est faux, mais en aucun cas ne l'oriente vers la bonne réponse ou ne lui précise où se trouve son erreur. Le professeur peut alors intervenir pour aider les élèves en difficulté et leur proposer par exemple des situations de rappels, de révisions, de remédiation sur l'application du théorème de Thalès.



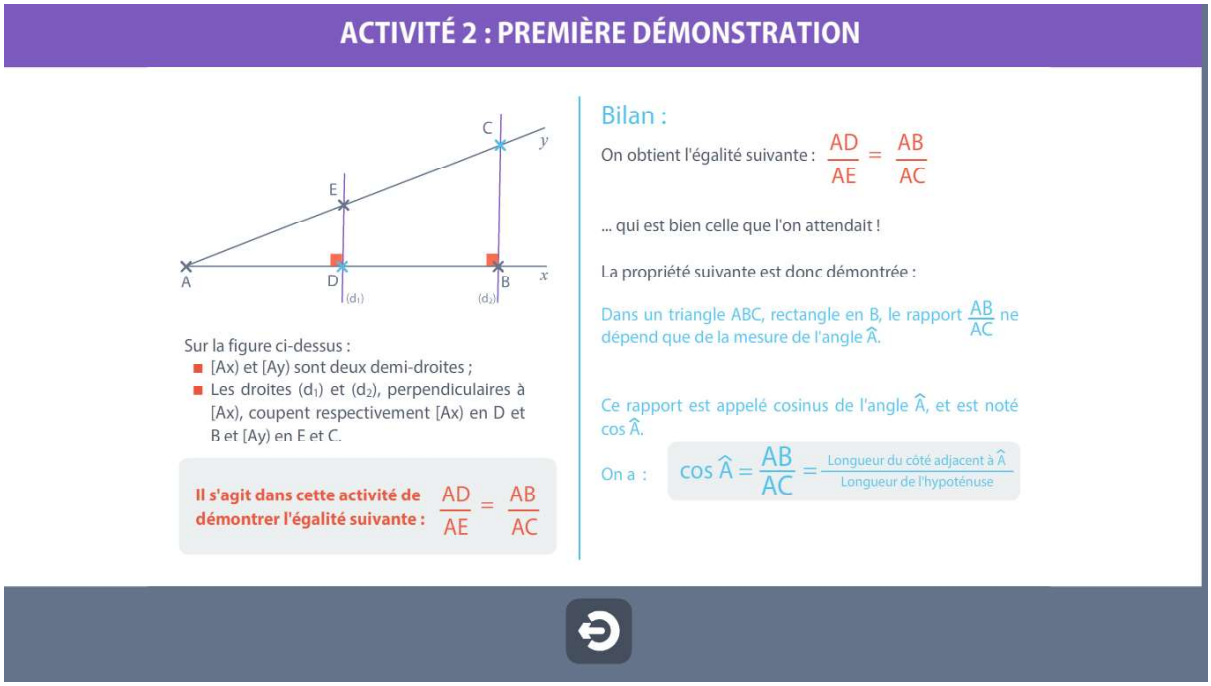
3. La troisième étape consiste à écrire l'égalité des produits en croix suite aux rapports de Thalès. Cette égalité est déjà commencée et l'élève doit la compléter en glissant les bonnes étiquettes dans les cases correspondantes.
Là encore, le professeur peut intervenir pour aider les élèves en difficulté, leur rappeler le principe de l'égalité des produits en croix ou bien faire le choix de laisser les élèves tâtonner seuls.



4. La dernière étape permet d'aboutir au résultat annoncé au départ, en simplifiant les écritures fractionnaires obtenues suite à l'égalité des produits en croix.
L'élève doit toucher le facteur qu'il souhaite « supprimer ».



Finalement, la démonstration est terminée et un bilan est fait. L'application livre alors en bleu clair la propriété globale qui vient d'être démontrée.



Plusieurs remarques peuvent être faites suite à ce type d'activités de démonstration. Tout d'abord, on peut se poser la question de l'intérêt du numérique pour faire ce genre de démonstration. Qu'apporte de plus le numérique par rapport à une démonstration papier guidée pas à pas en collant aux différentes étapes énoncées plus haut ? Clairement, le numérique ici induit une grande autonomie dans la réalisation de la démonstration. Les élèves peuvent être laissés « seuls » et parvenir à la démonstration sans grande difficulté, quitte à ce qu'ils tâtonnent quelques fois (mais quel mal y-a-t-il à tâtonner dans une activité de recherche !). Le numérique offre aussi son confort moderne : l'interface est dynamique, ergonomique, fluide. Un autre point positif du numérique par rapport à la version papier est qu'à chaque étape du raisonnement, on conserve la figure de départ et le but de la démonstration dans la colonne de gauche. On ne perd ainsi jamais de vue l'objectif final.
En revanche, le seul bémol que l'on pourrait trouver à cette démonstration numérique guidée est que justement elle le soit. En effet, le découpage étape après étape laisse peu de place à l'initiative des élèves sur la pratique de la démonstration et du raisonnement déductif. Selon les conditions, on aurait très bien pu imaginer mener cette démonstration en classe sous la forme d'une tâche à prise d'initiative en annonçant l'objectif final et en laissant les élèves laisser libre cours à leurs diverses formes d'imagination dans le but d'aboutir au résultat. Toutefois, on comprend aisément qu'il s'agit d'un choix de l'auteur pour entrer dans le format numérique sans avoir trop de contraintes et de paramètres à gérer.
Pour aller plus loin, on peut également envisager de proposer aux élèves de réaliser cette démonstration à la maison en devoir hors la classe ; puis de retour en classe, mener cette démonstration avec le groupe classe, au format papier, afin d'accélérer le processus et de prendre le temps de faire les rappels nécessaires à la bonne compréhension de chacun des chaînons déductifs abordés dans les étapes de la démonstration numérique.

Deuxième démonstration : Relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu

L'objectif de cette activité de démonstration est d'établir la relation :
$(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$.

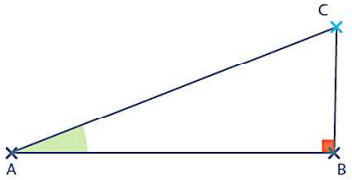
Cette démonstration est découpée en 6 étapes :
1. Écrire les rapports correspondants à $\cos \hat{A}$ et $\sin \hat{A}$.
2. Calculer $(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2$ en remplaçant $\cos \hat{A}$ et $\sin \hat{A}$ par leurs rapports respectifs.
3. Écrire le résultat correspondant au carré d'un quotient.
4. Additionner deux fractions.
5. Écrire l'égalité de Pythagore dans le triangle rectangle.
6. Établir qu'une fraction ayant même numérateur et dénominateur est égale à 1.

1. L'élève fait glisser les étiquettes dans les cases correspondantes. Des propositions de remédiations sur les connaissances du cosinus et du sinus peuvent être proposées aux élèves pour surmonter cette première étape.

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

Propriété n° 1 :

Il s'agit dans cette activité d'établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu.
On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en B.



Étape 1/6 :

Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle aigu $\widehat{BAC}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC :

AB AC BC

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\square}{\square}$$

AB AC BC

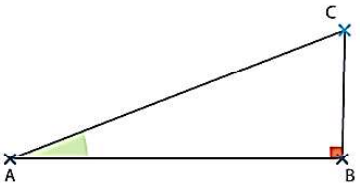
$$\sin \widehat{BAC} = \frac{\square}{\square}$$

2. L'élève choisit la bonne propriété permettant de calculer le carré d'un quotient.
Une aide avec des essais numériques peut être proposée aux élèves pour les aider dans leurs décisions.

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

Propriété n° 1 :

Il s'agit dans cette activité d'établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu.
On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en B.



Étape 2/6 :

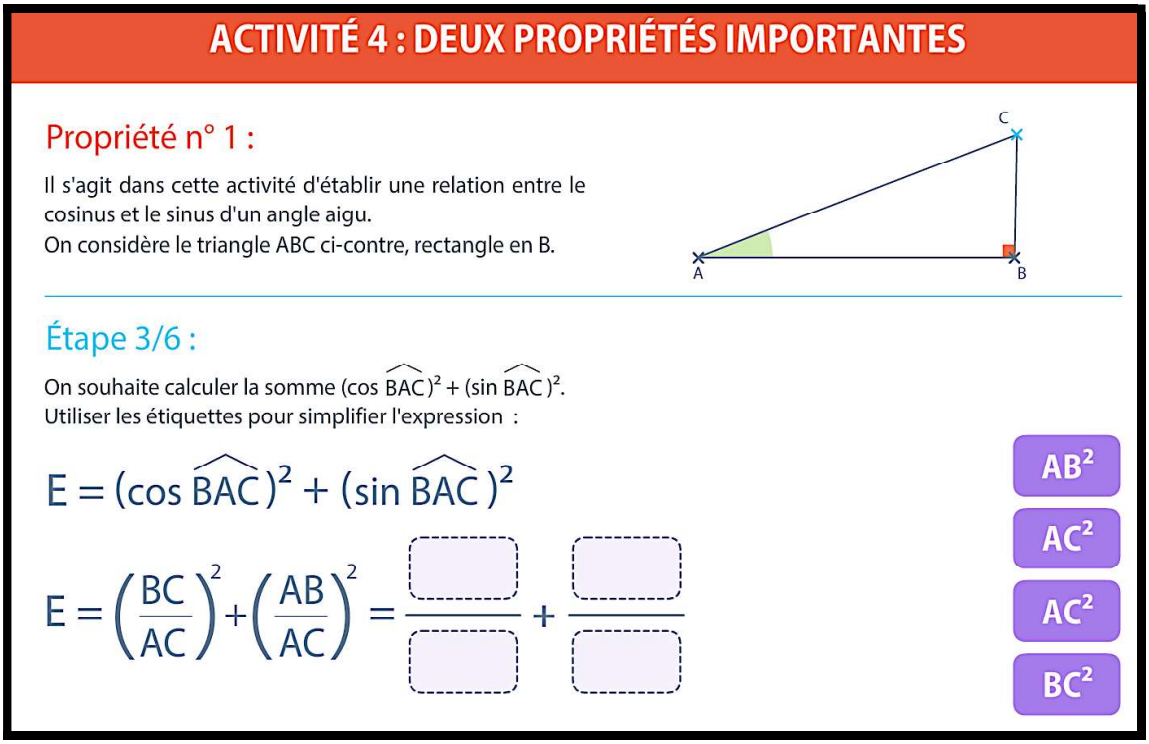
On souhaite calculer la somme $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$.
Sélectionner la propriété à utiliser pour simplifier l'expression obtenue :

$$E = (\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$$

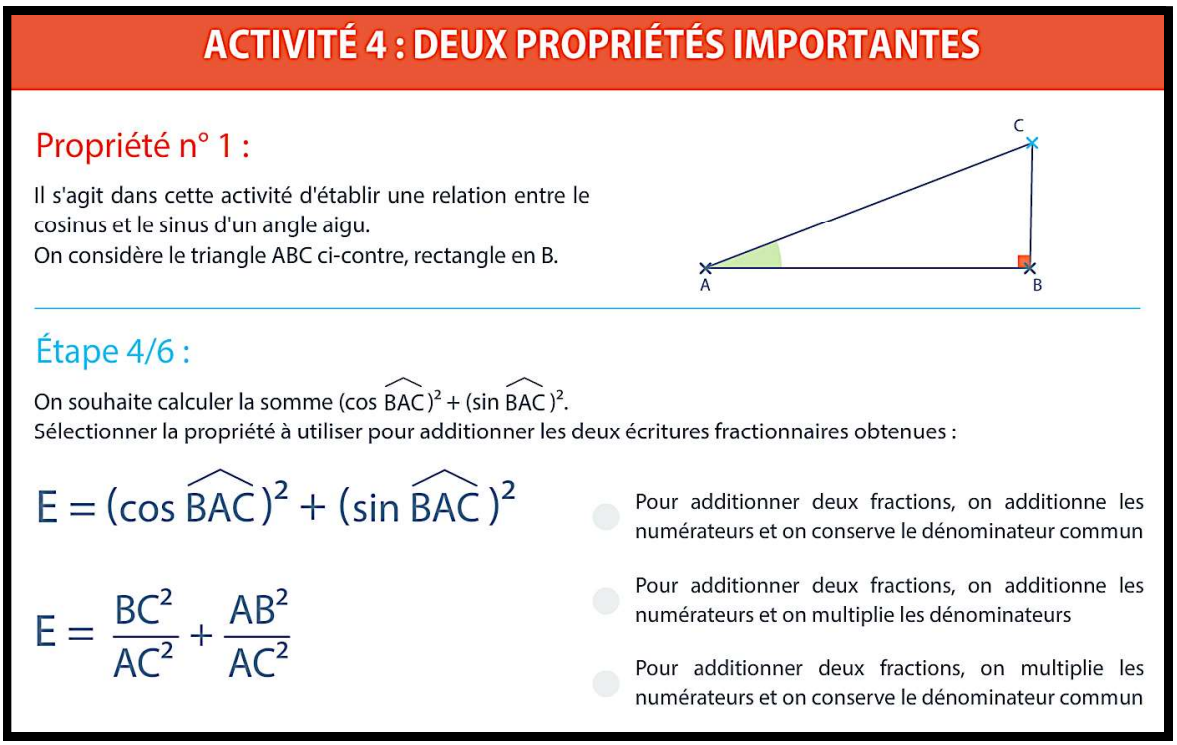
$$E = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

- Le carré d'une somme est égal à la somme des carrés
- Le carré d'un quotient est égal au quotient des carrés
- Le carré d'un quotient est égal au double de ce quotient

3. L'élève applique la propriété précédente en glissant les étiquettes dans les cases prévues. Une possibilité de complexifier la chose aurait été de proposer une seule fois chaque carré et d'avoir la possibilité pour l'élève d'utiliser plusieurs fois le même carré (ici AC^2).



4. L'élève doit choisir la propriété permettant d'additionner les deux fractions obtenues. Des essais numériques peuvent à nouveau aider les élèves en difficulté.

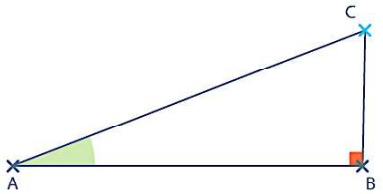


5. L'élève doit écrire l'égalité de Pythagore. Une proposition de remédiation peut être envisagée ici pour les élèves en difficulté avec l'application de ce théorème.
Des étapes intermédiaires peuvent être proposées avec l'identification de l'hypoténuse et des côtés adjacents à l'angle droit.

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

Propriété n° 1 :

Il s'agit dans cette activité d'établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu.
On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en B.



Étape 5/6 :

On souhaite calculer la somme $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$.
Quelle égalité le théorème de Pythagore permet-il d'écrire dans le triangle ABC, rectangle en B ?

$$E = (\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$$

$$E = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2}$$

AB^2 AC^2 BC^2

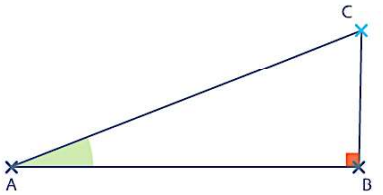
[ ] + [ ] = [ ]

6. Enfin l'élève doit de nouveau choisir une propriété pour conclure la démonstration. Là encore des exemples numériques peuvent aider les élèves les plus en difficulté.

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

Propriété n° 1 :

Il s'agit dans cette activité d'établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu.
On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en B.



Étape 6/6 :

On souhaite calculer la somme $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$.
Sélectionner la propriété à utiliser pour terminer la démonstration :

$$E = (\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$$

Théorème de Pythagore

$$E = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

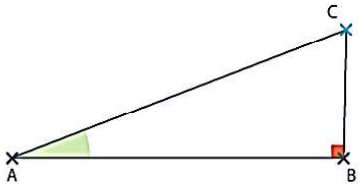
- Le quotient d'un nombre par lui-même est égal à 0.
- Le quotient d'un nombre par lui-même est égal à 1.
- Le quotient d'un nombre par lui-même est égal à ce nombre.

La démonstration s'achève par deux bilans successifs et une mise en application de la propriété démontrée.

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

Propriété n° 1 :

Il s'agit dans cette activité d'établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu.
On considère le triangle ABC ci-contre, rectangle en B.



Étape 6/6 :

On souhaite calculer la somme $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$.

$$E = (\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2$$

Théorème de Pythagore

$$E = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

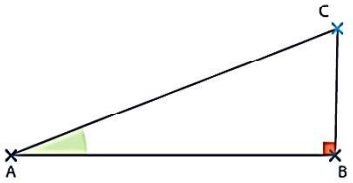
On vient donc de montrer que pour tout angle aigu $\widehat{BAC}$, on a :
$(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2 = 1$

ACTIVITÉ 4 : DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

On vient donc de démontrer la propriété suivante :

Propriété n° 1 :

Pour tout angle aigu $\widehat{A}$, on a : $(\cos \widehat{A})^2 + (\sin \widehat{A})^2 = 1$



Application :

Lorsqu'on connait la valeur du cosinus (ou du sinus !) d'un angle aigu, on peut donc calculer la valeur exacte de son sinus (ou de son cosinus !), sans avoir besoin de connaître la mesure de cet angle !

Par exemple :

On sait que $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

On a donc $(\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2 = 1$, soit $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin 60°)^2 = 1$

On a alors $(\sin 60°)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, soit $\sin 60° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (sin 60° est un nombre positif !)

Pour conclure, comme évoqué précédemment, ces propositions d'activités de démonstration au format numérique ont l'avantage certain de la mise au travail en autonomie des élèves. Le découpage est fin et permet de bien appréhender chacun des chaînons déductifs des démonstrations. La possibilité de projeter ces activités au tableau permet aussi de faire la démonstration avec le groupe classe de manière ludique et dynamique. L'omniprésence de l'objectif à chaque étape de la démonstration permet pour les élèves en difficulté de ne pas perdre de vue ce qu'ils sont en train de chercher à démontrer. Par ailleurs, le découpage en étapes courtes évite la lassitude des élèves et la « peur » de la longueur d'une telle démonstration lorsqu'on la propose au format papier.

Enfin, les professeurs peuvent aussi s'emparer de ces démonstrations au format numérique pour remédier aux difficultés des élèves selon les étapes. En effet, on peut proposer la démonstration au groupe classe sous la forme d'une tâche à prise d'initiative et venir distribuer aux élèves qui en ressentiraient le besoin (ceux qui auraient du mal à démarrer par exemple ou bien ceux qui auraient des difficultés sur une des étapes de la démonstration) la tablette avec l'application lancée. Les élèves ainsi débloqués pourraient continuer leur cheminement personnel ou bien suivre celui proposé par l'application.
Voilà donc une possibilité ludique de pratiquer la démonstration avec tous les élèves en fin de cycle 4. Il serait dommage de s'en priver !
En complément, vous pouvez également découvrir la dernière démonstration numérique proposée, celle de la relation $\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \tan \hat{A}$, (pour un angle $\hat{A} \neq 0$).

À propos de l'auteur de cette application :
Christophe AUCLAIR est un professeur de mathématiques de l'académie de Dijon qui, depuis plusieurs années, développe des applications tablettes pour les mathématiques. Ces applications sont disponibles sur le site disciplinaire académique de Dijon : http://mathematiques.ac-dijon.fr/spip.php?article196, elles sont par ailleurs multisupports : Android, iOS et Windows.
Gratuites, elles sont pensées par un enseignant de terrain et donc au plus proche des besoins des collègues. L'auteur est très disponible (Twitter : @multimaths ou par Christophe.Auclair@ac-dijon.fr) et améliore ses applications régulièrement en corrigeant les rares bugs et en tenant compte des retours qu'il peut avoir.
Même si elles ont pour beaucoup été pensées pour le collège, de nombreuses applications sont utilisables dès le cycle 2 (par exemple l'application Défi Tables) elles peuvent aussi être très utiles au lycée. Elles couvrent de très nombreuses notions des programmes, ne se cantonnant pas à de simples exerciseurs. Ce riche travail de l'académie de Dijon permet un usage pertinent du numérique pédagogique.