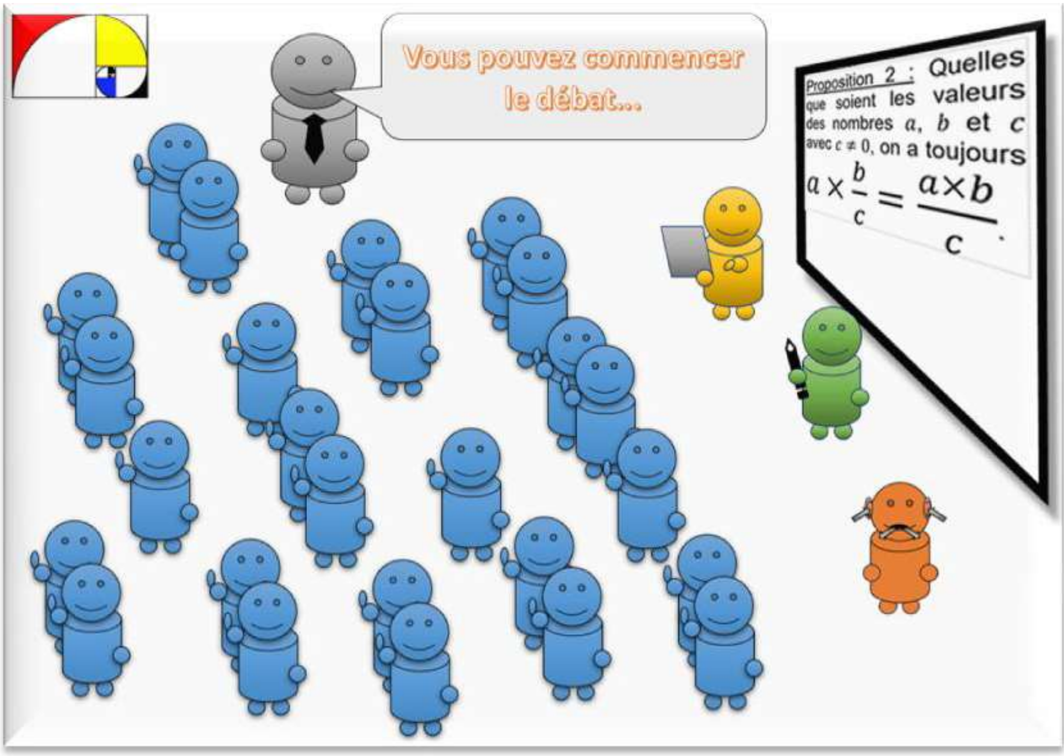
II – Démonstrations de résultats de cours

A. Démonstrations de résultats de cours sur les fractions en cinquième

Pascal FABREGUES
Collège CONDORCET de Pontault-Combault (77)
Niveau : 5ème
Durée : 5 séances



Dans le but de faire découvrir puis démontrer les propriétés $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$; $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$; $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, deux sortes d'activités ont été préparées :

- trois situations amenant à conjecturer les propriétés ;
- cinq propositions théoriques à démontrer ou à réfuter.

Ces travaux se sont étalés sur 5 séances de 55 minutes (moins 5 minutes de rituel « Question flash ») à la suite desquelles les élèves ont pu étudier une fiche de leçon récapitulative, puis s'entraîner sur des exercices fondamentaux et plus tard aborder des tâches à prise d'initiative.
Les deux dispositifs pédagogiques « Débat en classe » et « Recherche et présentation collaboratives » - cf. liens vers les vidéos de présentation dans cette brochure - sont plusieurs fois utilisés pour organiser l'expression des idées, induire des comportements concernés, et finalement conduire à la production de synthèses satisfaisant le plus grand nombre et conformes aux objectifs.
Deux classes de 5ème ont mené similairement ses travaux. Dans les comptes rendus qui suivent, leurs productions ont été indifféremment mélangées pour mettre en valeur leur intérêt.

Programmes de mathématiques

Extrait du bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes
Nombres Connaissances ➢ nombres décimaux (positifs et négatifs), notion d'opposé ; ➢ fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs), notion d'inverse ; ➢ les carrés parfaits de 1 à 144 ; ➢ définition de la racine carrée ; ➢ les préfixes de nano à giga. Compétences associées ➢ utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; ➢ passer d'une représentation d'un nombre à une autre.
Comparaisons de nombres Connaissances ➢ égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) ; ➢ ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. Compétences associées ➢ comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique ➢ repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée ; ➢ associer à des objets des ordres de grandeur (par exemple taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, longueur de l'intestin, capacité de stockage d'un disque dur, vitesses du son et de la lumière, populations française et mondiale, distance Terre-Lune, distance du Soleil à l'étoile la plus proche, etc.).
Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté Connaissances ➢ somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux, de deux nombres rationnels ; ➢ puissance d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs) ; ➢ notation scientifique. Compétences associées ➢ calculer avec des nombres relatifs, des fractions, des nombres décimaux ; ➢ vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur ; ➢ effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique ; ➢ utiliser la racine carrée pour résoudre des problèmes, notamment géométriques ; ➢ effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes. *La mise en acte de produits et de quotients de puissances de même base résulte de l'application de la définition plutôt que de celle d'une formule.*

Repères de progression (classe de 5ème)

Fractions, nombres rationnels
La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient : • $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ • $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ • $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ • $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration. Exemple de calcul fractionnaire permettant de démontrer que $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ On commence par calculer $\frac{3}{2} \times 10$: $\frac{3}{2} \times 10 = \frac{3}{2} \times (2 \times 5) = \left(\frac{3}{2} \times 2\right) \times 5$ La définition du quotient permet de simplifier par 2, puisque $\frac{3}{2}$ est le nombre qui, multiplié par 2, donne 3. Donc : $\frac{3}{2} \times 10 = \frac{3}{2} \times (2 \times 5) = \left(\frac{3}{2} \times 2\right) \times 5 = 3 \times 5 = 15$ $\frac{3}{2}$ multiplié par 10 donne 15. Ainsi, par définition du quotient, il vient donc que $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$.

Enoncés fournis aux élèves

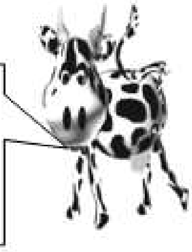
NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE — 5ème

Activités *Pour chaque activité, participe au débat avec les questions et réponses qui te viennent à l'esprit.*

Activité 1 : Division impossible ?

Il est impossible de trouver un quotient exact pour la division de 7 par 3 !

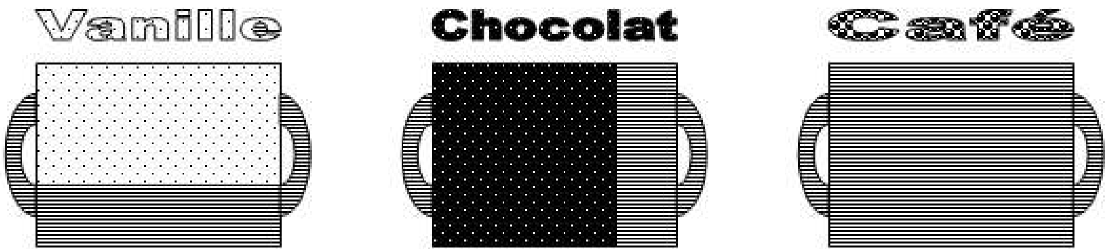
Les fractions rendent toutes les divisions possibles !



Activité 2 : Ce n'est pas de la tarte !

Honoré est apprenti vendeur chez un pâtissier.
Le pâtissier lui avait donné à vendre trois grands gâteaux rectangulaires de même taille.

A un client, il a vendu un tiers du gâteau à la vanille et un quart de celui au chocolat et celui au café tout entier.
Voilà ce qui reste :



Découvrant cela, le pâtissier n'est pas très satisfait :

« Allons ! On ne vend pas des morceaux de gâteaux ! On les vend tout entier !
Qui voudra acheter seulement trois quarts de gâteau ? Ou deux tiers de gâteau ?
On va être obligé de faire des parts individuelles en découpant les parties de gâteaux restantes.
Pour réparer ton erreur, tu vas choisir comment découper ces parts !
Mais qu'elles ne soient pas trop petites car il faut les vendre rapidement !
Et que les parts à la vanille aient la même taille que celles au chocolat pour faire une jolie présentation ! »

Activité 3 : Opérations.

Quand j'ajoute $\frac{7}{8}$ et $\frac{3}{4}$, cela fait $\frac{10}{12}$.
Quand je les soustrais, cela fait $\frac{4}{4}$.

Je suis partagée !
Sept huitièmes de pizza, ça fait presque une pizza entière.
Trois quarts d'une pizza, ça fait presque une autre pizza entière.
Selon moi, la somme devrait faire plus qu'une pizza, presque deux !

Verso

Activité 4 : 5 propositions en 5 débats

Rappel : Quotient
Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$.
Le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a, c'est-à-dire : $b \times \frac{a}{b} = a$

Parmi les propositions suivantes, lesquelles a-t-on le droit de mettre dans la leçon ? Justifier.

Proposition 1 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$.

Proposition 2 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$.

Proposition 3 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.

Proposition 4 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Proposition 5 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Déroulement extrait du cahier de textes d'une classe

Séance 1
- Question flash.
- 1 fiche à coller dans le cahier : activités.
- Constitution des groupes pour la recherche des activités 1 à 3.
- Recherche des activités en petits groupes.
- Présentations de l'activité 1 par trois groupes.

Séance 2
- Question flash.
- Trace écrite de l'activité 1.
- Activité 5 proposition 1 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 1.
- Activité 5 proposition 2 en débat (Essai 1).

Séance 3
- Question flash.
- Activité 5 proposition 2 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 2.
- Présentations de l'activité 2 par deux groupes.

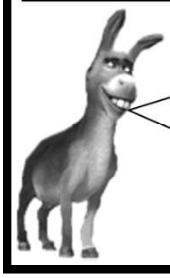
Séance 4
- Question flash.
- Trace écrite de l'activité 2.
- Activité 5 proposition 3 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 3.
- Présentation de l'activité 3 par un premier groupe.

Séance 5
- Question flash.
- Présentations de l'activité 3 par deux autres groupes.
- Trace écrite de l'activité 3.
- Activité 5 proposition 4 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 4.
- Activité 5 proposition 5 en débat.
- Trace écrite de l'activité 5 proposition 5.
- 2 fiches à coller dans le cahier : leçon et exercices.

Compte rendu : activité 1 puis activité 4 propositions 1 et 2

Après la question flash de début de séance, une vingtaine de minutes a été consacrée à la recherche des activités 1 à 3 par des groupes de trois à quatre élèves dans le but de les présenter ultérieurement à la classe (cf. « Recherches et présentations collaboratives » dans la présente brochure).
Ensuite, trois groupes ont successivement présenté leurs propositions pour l'activité 1.

Activité 1 : Division impossible ?



Il est impossible de trouver un quotient exact pour la division de 7 par 3 !

Les fractions rendent toutes les divisions possibles !

Un groupe qui n'envisage que le quotient décimal, éventuellement infini.

7,00 | 3
-6 | 2,3
1 0
- 9
1 0

$7 \div 3 \approx 2,333$ / $\frac{7}{3} = 2,333...$

Cela créé une boucle infinie.

Un groupe qui n'a pensé qu'au quotient entier.

$7 \div 3 =$ $q = 2$ $r = 1$

L'âne n'a pas raison car il est impossible de trouver le quotient exact car il y a un reste.

Un groupe qui propose un quotient exact en fraction sans en apporter la preuve.

$7 \div 3 = 2,3333333...$
$7 \div 3 = \frac{7}{3}$

Le résultat de $7 \div 3 = \frac{7}{3}$ est égal à en fraction mais il n'y a pas de quotient exact en nombre simple

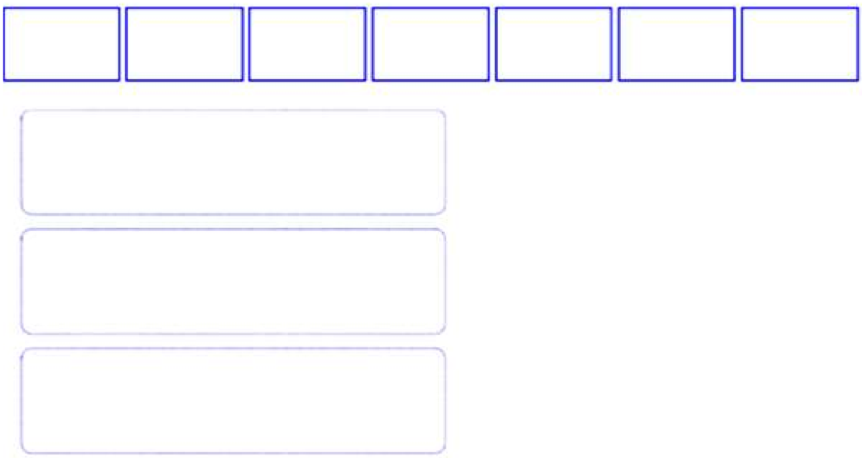
On peut obtenir un quotient inexact en nombre simple en écrivant 2,33... (En ajoutant le nombre de 3 qu'on veut)

Le groupe précise que la fraction a été affichée par la calculatrice comme résultat de 7 divisé par 3.

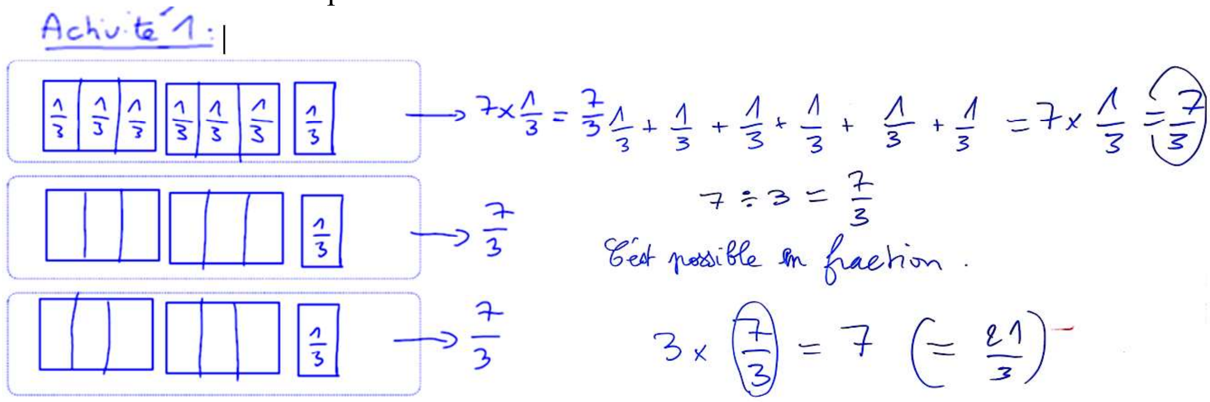
La séance se termine avec la conviction qu'il n'est pas possible de trouver le quotient exact sous forme décimale (une fois précisé que « décimal » signifie « avec un nombre fini de chiffres non nuls).
Elle se conclut toutefois dans le désaccord entre ceux qui pensent qu'il n'est pas du tout possible de trouver un quotient exact et ceux qui envisagent une partie décimale infinie alliés à ceux qui pensent à l'écriture fractionnaire.

Après la question flash de début, pour faire suite aux présentations de la fois précédente, la deuxième séance débute avec la projection au tableau de la problématique suivante.

7 gâteaux identiques à diviser en 3.



Un débat mène alors à la production de la trace écrite ci-dessous.



Je demande alors aux élèves leur avis sur le rappel proposé au début de l'énoncé de l'activité 4.

> <u>Rappel :</u> Quotient
> Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$.
> Le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a, c'est-à-dire : $b \times \frac{a}{b} = a$

Les élèves s'expriment pour s'accorder sur sa similitude avec le résultat de l'activité, a et b aux places respectives de 7 et 3. Les élèves formulent la raison de l'emploi de lettres dans le rappel : c'est pour dire que c'est vrai pour tous les nombres, ou presque : la mention « $b \neq 0$ » est explicitée.

La proposition 1 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 1 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$.

Le débat est de courte durée, un élève proposant rapidement de remplacer les lettres par trois nombres choisis par ses soins.

Activité 4 proposition 1 :

Essai 1 :

$b = 3$
$c = 4$
$a = 2$

$$\frac{2+4}{3+4} = \frac{6}{7} \neq \frac{2}{3}$$

La proposition est fausse.

C'est un contre-exemple.

La règle de priorité en cas de grande barre de fraction ayant déjà été vue, le calcul ne pose pas de problème. Et les élèves s'accordent sur le fait que $\frac{6}{7}$ diffère de $\frac{2}{3}$.

Le professeur fait remarquer qu'un seul exemple suffit pour démontrer qu'une proposition est fausse et qu'on le nomme alors : « contre-exemple ».

La proposition 2 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 2 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$.

La proposition 2 de l'activité 4 est soumise au débat.

Un élève propose immédiatement d'essayer avec des nombres de son choix.

essai1:

$a = 5 \quad b = 4 \quad c = 6$

Il veut qu'on écrive au tableau $5 \times \frac{4}{6} = \frac{5 \times 4}{6}$.

Mais, tiens donc ! Le professeur demande qu'on retire le « égal » tant qu'il n'est pas prouvé ! et qu'on tire un grand trait vertical pour examiner chacun des membres séparément.

$5 \times \frac{4}{6}$	$\frac{5 \times 4}{6} = \frac{20}{6}$

Les élèves un peu étonnés y consentent et l'un d'eux intervient pour proposer un calcul du membre de droite.

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

Le professeur interroge alors sur la signification de $\frac{20}{6}$. Des évocations de partages sont dites mais pas de référence à la définition du quotient. Le professeur reprend le rappel pour dégager : $6\times\frac{20}{6}=20$. Il souligne que *par définition*, $\frac{20}{6}$ est le nombre qui, multiplié par 6, donne 20.

Les élèves ont l'air perplexe car, bien que $6\times\frac{20}{6}=20$ leur soit familier, ils ne voient pas encore en quoi cette gymnastique mentale va permettre de prouver l'égalité avec $5\times\frac{4}{6}$.

L'affichage en est là :

$$5\times\frac{4}{6}$$

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

$$6\times\frac{20}{6}=20$$

Le professeur rompt le silence qui s'installe en amenant les élèves à adhérer et à verbaliser avec lui le raisonnement suivant :

A droite, quand on multiplie $\frac{20}{6}$ par 6, ça fait 20. Pour que le calcul $5\times\frac{4}{6}$ de gauche soit égal au nombre $\frac{20}{6}$ à droite, on va multiplier $5\times\frac{4}{6}$ par 6, en espérant trouver 20.

En soulignant les associations et commutativités, puis en utilisant à nouveau la définition du quotient ($6\times\frac{4}{6}=4$), on trouve bien le résultat 20. La séance se termine avec l'écriture de l'égalité tant espérée !

$$5\times\frac{4}{6}$$

$$\begin{aligned}&6\times\left(5\times\frac{4}{6}\right)\\=&(6\times5)\times\frac{4}{6}\\=&(5\times6)\times\frac{4}{6}\\=&5\times\left(6\times\frac{4}{6}\right)\\=&5\times4\\=&20\end{aligned}$$

$$\frac{5\times 4}{6}=\frac{20}{6}$$

$$6\times\frac{20}{6}=20$$

$$\boxed{5\times\frac{4}{6}=\frac{5\times4}{6}}$$

Après la question flash de début de séance, le premier essai est projeté au tableau numérique. Il est alors demandé aux élèves de procéder à un deuxième essai en réécrivant le premier avec trois autres nombres. Les élèves choisissent 1 ; 2 et 3 pour remplacer les lettres a, b et c.

Essai 2 :

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$1 \times \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1\times 2}{3} = \frac{2}{3}$

$3 \times \left(1 \times \frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $3 \times \frac{2}{3} = 2$

$= (3 \times 1) \times \frac{2}{3}$

$= (1 \times 3) \times \frac{2}{3}$

$= 1 \times \left(3 \times \frac{2}{3}\right)$

$= 1 \times 2$

$= 2$

$\boxed{1 \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{3}}$

Il est ensuite souligné que ces deux exemples prouvent que la propriété est vraie deux fois, pour les nombres choisis. Les élèves acquiescent sur le fait que ça ne prouve pas qu’elle soit vraie pour l’infinité des nombres possibles. Le professeur énonce que pouvoir écrire autant de fois qu’on veut un nouvel essai en remplaçant de manière automatique les nombres anciens par des nouveaux, et que tout soit alors bien correct, amène à conjecturer que c’est reproductible à l’infini.
Une conjecture est énoncée et la preuve est rédigée pas à pas, assez lentement, en soulignant d’une part les correspondances entre les essais numériques et la présente démonstration, d’autre part en précisant systématiquement à l’oral les propriétés employées (associativité, commutativité, définition du quotient).

Essai 2 :

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$1 \times \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1\times 2}{3} = \frac{2}{3}$

$3 \times \left(1 \times \frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ $3 \times \frac{2}{3} = 2$

$= (3 \times 1) \times \frac{2}{3}$

$= (1 \times 3) \times \frac{2}{3}$

$= 1 \times \left(3 \times \frac{2}{3}\right)$

$= 1 \times 2$

$= 2$

$\boxed{1 \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{3}}$

Conjecture : c’est vrai.

Preuve : $a \times \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\frac{a \times b}{c}$

$c \times \frac{a \times b}{c} = \boxed{a \times b}$

$c \times \left(a \times \frac{b}{c}\right) = (c \times a) \times \frac{b}{c}$

$= (a \times c) \times \frac{b}{c}$

$= a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right)$ $\qquad$ $c \times \frac{b}{c} = b$

$= \boxed{a \times b}$

Pour tous nombres a, b, c avec $c \neq 0$: $\boxed{a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}}$

La discussion porte ensuite sur la validité de la preuve avec des lettres, il est précisé que *l'utilisation des lettres permet la généralisation*. L'écriture avec des lettres est vraie pour toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces lettres, ou presque : la mention « $c \neq 0$ » est à nouveau expliquée.
Quelques mots rassurants sont nécessaires pour lever l'inquiétude qui se lit dans certains regards et qui s'exprime par la question : « Est-ce qu'on l'aura en contrôle ? ». *Le professeur assure que ce genre d'activité sera toujours menée en séance de classe, sans évaluation, sous la guidance du professeur ; l'objectif étant de s'habituer d'une part à l'utilisation des lettres pour généraliser, d'autre part d'intégrer peu à peu la démarche « essais, conjecture, preuve ».*

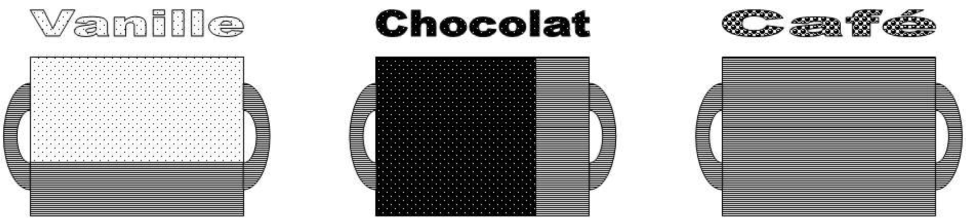
Compte rendu : activité 2 puis activité 4 proposition 3

Il faut préalablement noter que le choix de démontrer en premier la propriété $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$ n'est pas dû au hasard. Cette propriété va servir de lemme utilisé dans la démonstration de la suivante.
Deux groupes ont successivement présenté leurs propositions pour l'activité 2.

<u>Activité 2 :</u> Ce n'est pas de la tarte !

Honoré est apprenti vendeur chez un pâtissier.
Le pâtissier lui avait donné à vendre trois grands gâteaux rectangulaires de même taille.

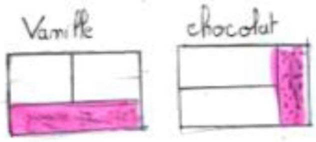
A un client, il a vendu un tiers du gâteau à la vanille et un quart de celui au chocolat et celui au café tout entier.
Voilà ce qui reste :



Découvrant cela, le pâtissier n'est pas très satisfait :

« Allons ! On ne vend pas des morceaux de gâteaux ! On les vend tout entier !
Qui voudra acheter seulement trois quarts de gâteau ? Ou deux tiers de gâteau ?
On va être obligé de faire des parts individuelles en découpant les parties de gâteaux restantes.
Pour réparer ton erreur, tu vas choisir comment découper ces parts !
Mais qu'elles ne soient pas trop petites car il faut les vendre rapidement !
Et que les parts à la vanille aient la même taille que celles au chocolat pour faire une jolie présentation ! »

Un groupe qui n'a pas bien intégré qu'il fallait découper en parts identiques (confondant peut-être « parts identiques » et « même nombre de parts » ?).



Cela fait trois parts pour chaque gâteau.

On a découpé les parts de vanille à la verticale.
On a découpé les parts de chocolat à l'horizontal

Donc les parts sont égales.

Un groupe qui a bien dessiné les découpages et qui a envisagé les douzièmes.

Un apprenti pâtissier a vendu à un client
- $\frac{1}{3}$ de gâteau à la vanille
- $\frac{1}{4}$ de gâteau au chocolat
- le gâteau au café entier

Donc il reste :
- $\frac{2}{3}$ de gâteau à la vanille
- $\frac{3}{4}$ de gâteau au chocolat

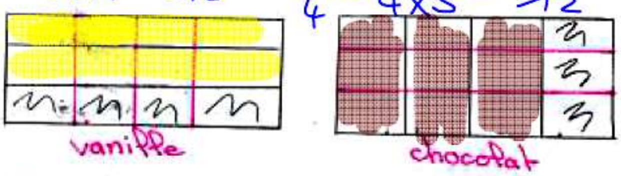
Il reste $\frac{8}{12}$ de gâteau à la vanille et $\frac{9}{12}$ de gâteau au chocolat.
Il y a donc plus de chocolat.

La séance se termine sur le questionnement de ce groupe.

Après la question flash de début de séance, un débat permet d'élaborer la trace écrite suivante incluant l'introduction des notations avec le même multiplicateur au numérateur et au dénominateur.

Activité 2 :

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ $\quad$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$



Il reste $\frac{8}{12}$ de gâteau à la vanille et $\frac{9}{12}$ de gâteau au chocolat.
Il y a donc plus de chocolat.

La proposition 3 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 3 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}$.

Sous la conduite du professeur, les élèves suivent la même trame que pour la proposition 2 : des essais, une discussion sur la validité de ces essais, une conjecture, une preuve littérale, une conclusion sur la validité et la portée de cette preuve. On remarquera que la propriété $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}$, précédemment démontrée, est plusieurs fois utilisée.

Essai 1 : $\frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{2}{3}$

$3 \times \frac{2}{3} = 2$

$3 \times \frac{2\times 4}{3\times 4}$

$= 3 \times \frac{8}{12}$

$= \frac{3\times 8}{12} = \frac{24}{12} = 2$

$\frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{2}{3}$

Essai 2 : $\frac{3\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{4}$

$4 \times \frac{3}{4} = 3$

$4 \times \frac{3\times 3}{4\times 3}$

$= 4 \times \frac{9}{12}$

$= \frac{4\times 9}{12} = \frac{36}{12} = 3$

$\frac{3\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{4}$

Conjecture : c'est vrai.

Preuve :

$\frac{a\times c}{b\times c}$

$b \times \frac{a\times c}{b\times c} = \frac{b\times a\times c}{b\times c}$

$= \frac{a\times b\times c}{b\times c}$

$= a \times \frac{b\times c}{b\times c}$

$= a \times 1$

$= a$

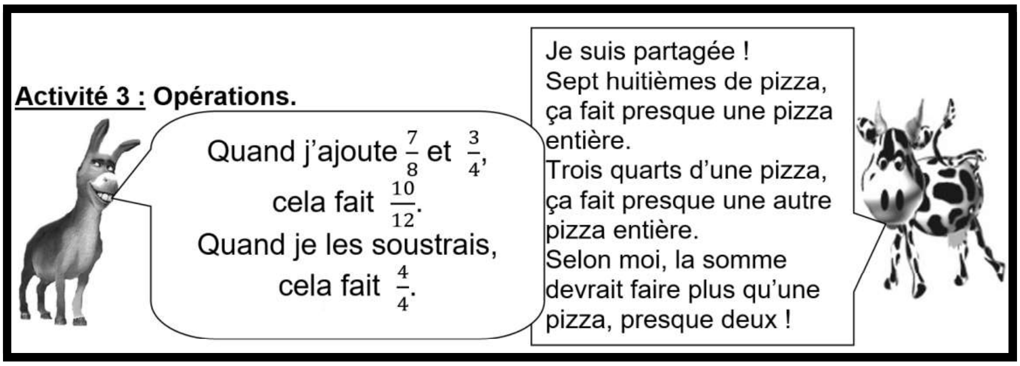
$\frac{a}{b}$

$b \times \frac{a}{b} = a$

Conclusion : Pour tous a, b, c avec $b \neq 0$; $c \neq 0$ $\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}$

Compte rendu : activité 3 puis activité 4 propositions 4 et 5

Un premier groupe présente ses propositions pour l'activité 3.



Il a écrit les résultats donnés par la calculatrice.

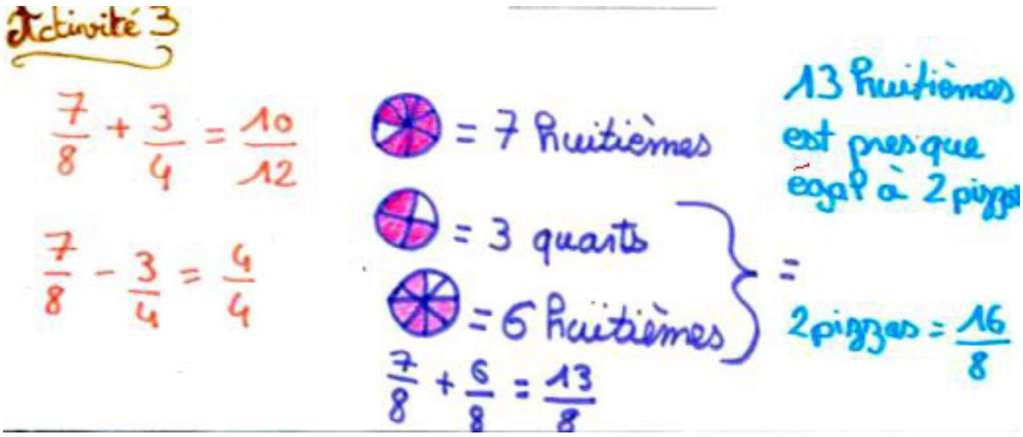
Âne = faux car $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{13}{8}$

non pas $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12}$

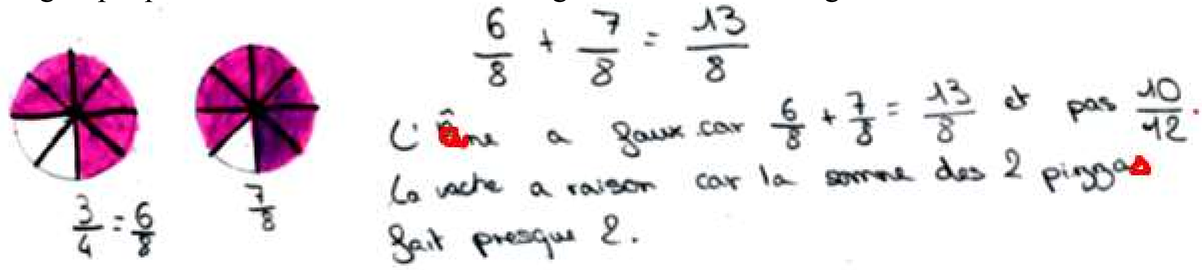
Vache =

La séance se termine sur cette présentation.

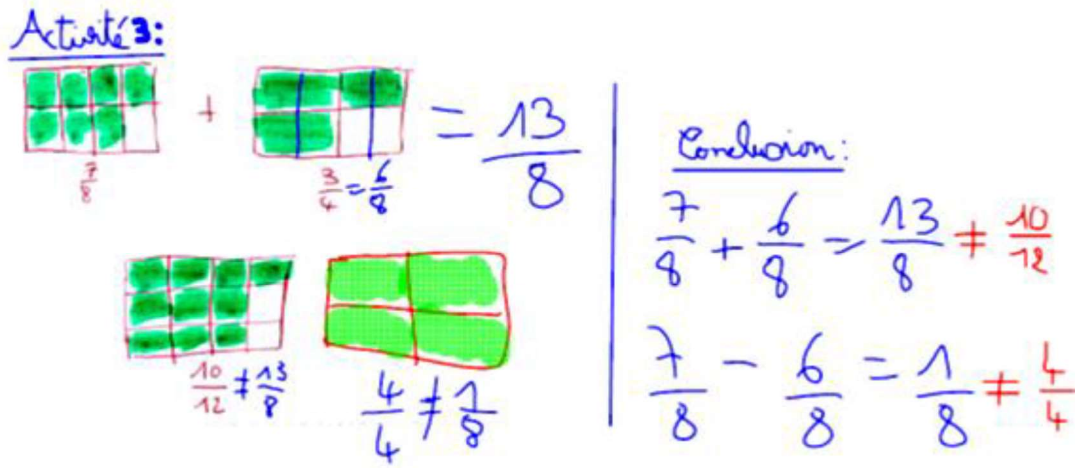
Après la question flash de début de séance, deux groupes présentent leurs propositions pour l'activité 3.
Un groupe qui écrit les égalités fausses puis explique que la première n'est pas possible en illustrant les propos de la vache. Il est souligné qu'il est fort gênant de laisser des égalités fausses sans aucun avertissement écrit les accompagnant.



Un groupe qui mène un raisonnement analogue en écrivant une égalité de fraction.



Le débat qui fait suite amène à la trace écrite suivante.



Il est remarqué qu'il est nécessaire de mettre les fractions au même dénominateur pour les ajouter ou les soustraire.

La proposition 4 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 4 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c \neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Sous la conduite du professeur, les élèves suivent la même trame que pour les propositions 2 et 3 : des essais, une discussion sur la validité de ces essais, une conjecture, une preuve littérale, une conclusion sur la validité et la portée de cette preuve. Il faut savoir que la notion de distributivité, à ce stade de l'année, n'a été travaillée que sur le plan numérique. Le rappel de cette notion par le professeur est nécessaire. Son utilisation, avec des fractions ou des lettres, considérés en tant que nombres, est une première pour les élèves.
L'activité 3 constituant un premier essai, il est convenu que le prochain essai qu'on écrira se nommera essai n°2. Voici la trace écrite élaborée en débat :

Activité 4 : proposition 4 :

Essai n°2 :

$a=4$, $b=3$, $c=2$

$\frac{4}{2}+\frac{3}{2}$

$2\times\frac{4}{2}=4$

$2\times\frac{3}{2}=3$

$$2\times\left(\frac{4}{2}+\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{4}{2}+2\times\frac{3}{2}=4+3=7$$

$\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

$2\times\frac{7}{2}=7$

Conclusion :

$\frac{4}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4+3}{2}$

Preuve :

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}\overset{?}{=}\frac{a+b}{c}\longrightarrow c\times\frac{a+b}{c}=a+b$$

$c\times\frac{a}{c}=a$ $\quad$ $c\times\frac{b}{c}=b$

$$c\times\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=c\times\frac{a}{c}+c\times\frac{b}{c}=a+b$$

Conclusion :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

quelque soient a, b, c avec $c\neq 0$

La proposition 5 de l'activité 4 est soumise au débat.

Proposition 5 : Quelles que soient les valeurs des nombres a, b et c avec $c\neq 0$, on a toujours $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Il est rapidement convenu que c'est quasi similaire à la proposition 4. On se contente ainsi de la trace écrite ci-dessous.

Proposition 5 : pareil avec moins.

Observations et remarques

Quelques observations liées à ces travaux :

• Il faut noter l'habituelle « perte » de quelques élèves dans les moments de démonstrations les plus théoriques, avec des écritures littérales. Mais le plus grand nombre semblait suivre.

• Bien que comprise et rédigée aisément par le plus grand nombre, la définition du quotient devait à chaque fois être amenée par le professeur au moment opportun. Quand elle faisait besoin pour avancer dans une démonstration, l'idée de l'utiliser ne venait jamais. Malgré les travaux menés au cycle 3, les élèves évoquent encore trop les fractions comme des partages et pas assez comme des nombres. Cela dit, c'est bien normal puisque c'est un objectif du cycle 4 qui commence à peine.

• Les élèves ont obtenu en très grande majorité de bons résultats au test de leçon qui demandait ensuite de réciter les formules littérales vues.

• Le temps d'entraînement qui a fait suite à ces activités a porté sur des exercices fondamentaux utilisant les propriétés vues. Les élèves ont le plus souvent trouvé naturel d'extraire une formule du cours, d'y remplacer les lettres par les nombres donnés afin de trouver comment rédiger et mener correctement les calculs demandés.

Quelques remarques d'ordre général :

• L'alternance entre les dispositifs pédagogiques « Recherches et présentations collaboratives » et « Débat en classe » permet de partir des représentations concrètes des élèves pour amener ces derniers à des considérations plus théoriques finales pour lesquelles le professeur doit apporter son expertise.

• Les six compétences « Chercher », « Modéliser », « Raisonner », « Calculer » « Représenter » et « Communiquer » sont au cœur de ces activités.

• Le statut des fractions ou de lettres en tant que nombres constitue une nouvelle forme d'abstraction avec laquelle l'élève se familiarise peu à peu.

• Au fur et à mesure de l'avancement de ces activités, des manières de raisonner se sont progressivement installées :

➢ la démarche « essai », « conjecture », « preuve » ;
➢ le remplacement des lettres par des nombres ;
➢ le remplacement des nombres par des lettres ;
➢ la valeur limitée d'une démonstration numérique : un exemple ou plusieurs ;
➢ la réfutation avec un contre-exemple ;
➢ la valeur universelle d'une démonstration littérale : usage de lettres afin de généraliser à tous les nombres ;
➢ le « parallélisme » entre les démonstrations numériques et littérales ;
➢ la justification d'une nouvelle propriété en utilisant celles qui sont déjà démontrées ;
➢ le nécessaire positionnement de conditions d'exclusions comme « $c \neq 0$ ».

Toutefois leur encrage demandera bien d'autres mises en activités, au cycle 4 et au-delà.