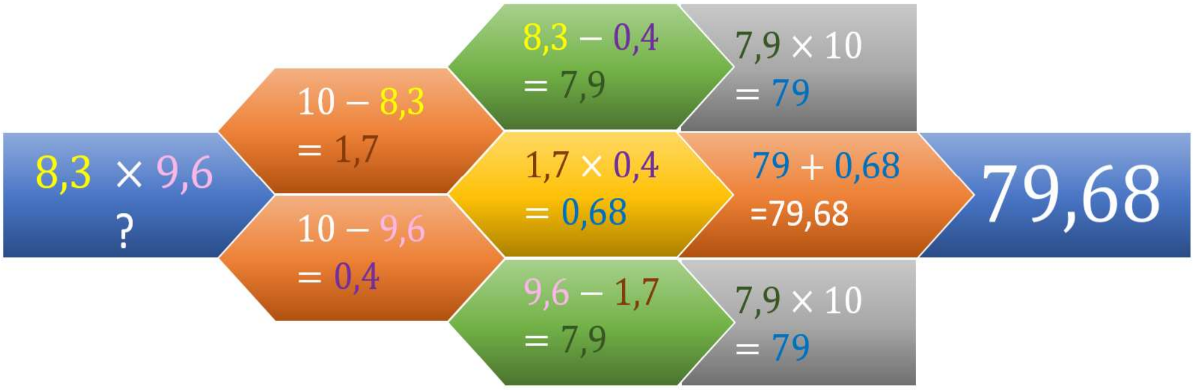
C. Grâce à la démonstration

Mohammed MESMOUDI
Collège JY COUSTEAU, Bussy St Georges(77)
Niveau : 3ème
Durée : 2 séances



Certains élèves ont du mal à retenir les tables de multiplication à partir de 5. On leur propose parfois d'autres techniques pour calculer mentalement des produits utilisant des chiffres dépassant 5.

Cet article étudie une de ces techniques et la démontre.

En faisant la démonstration, on se rend compte que l'on peut étendre cette technique bien au-delà, à des produits faisant intervenir des facteurs plus grands que 10, et même à des nombres décimaux. Cela aboutit alors à une magnifique technique de calcul mental très utile pour faire des produits du type 103×107 ou alors $99,8 \times 98,5$.
La démonstration fait appel au calcul littéral et aux compétences qui lui sont rapportées. De celle-ci, on déduit un algorithme de calcul qui fait parfois intervenir les nombres relatifs.
Il est également possible de faire une interprétation géométrique en transformant des rectangles et en travaillant sur leurs aires.

Objectifs pédagogiques

- Découvrir une méthode originale de calcul mental de produits.
- Déduire un algorithme de calcul.
- Initiation à la démonstration : Mobiliser ses connaissances pour démontrer une propriété mathématique.
- Revisiter les opérations sur les relatifs et le calcul littéral.

Les consignes et la réalisation attendue

Travail en petits groupes :
- Tester la méthode sur différents produits.
- Trouver une démonstration pour pouvoir la valider.
- Demander l'aide à l'enseignant si nécessaire.
- Chaque groupe doit rendre une copie contenant ses tests, ses traces de recherche et une tentative de démonstration.

Compétences mathématiques principalement mobilisées

Cette activité permet de développer en particulier les compétences mathématiques :

Chercher : l'élève s'engage dans une démarche scientifique ; observer ; questionner ; manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses ; chercher des exemples ou des contre-exemples ; émettre une conjecture. Tester ; essayer plusieurs pistes de résolution. Décomposer un problème en sous-problèmes.
Représenter : l'élève mobilise la compétence « représenter » pour choisir et mettre en relation des cadres numériques, algébriques et géométriques.
Raisonner : l'élève mobilise la compétence « raisonner » lorsqu'il mène collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. Il démontre en utilisant un raisonnement logique et des règles établies (formules et propriétés).
Communiquer : l'élève mobilise la compétence « communiquer » lorsqu'il explique à l'écrit sa démarche, son raisonnement. Comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.
Calculer : l'élève mobilise la compétence « calculer » lorsqu'il calcule de manière exacte en combinant de manière appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (pour les grands nombres). Il calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, ...)
Modéliser : l'élève mobilise la compétence « modéliser » lorsqu'il compare une situation à un modèle connu. Il valide ou invalide le modèle.

Compétences mobilisées du socle

➢ Domaine 1 : Les langages pour penser et communiquer
L'élève parle pour exprimer une opinion, une argumentation. L'élève rédige une réponse écrite développée et argumentée. L'élève utilise le langage mathématique (citer et utiliser une expression littérale, mettre un problème en équation, ...).
➢ Domaine 2 : Les méthodes et outils pour apprendre
L'élève sait identifier un problème, organise sa réponse seul ou en groupe, laisse une trace de ses activités.
➢ Domaine 3 : La formation de la personne et du citoyen
L'élève comprend et respecte les règles communes, s'implique dans la mise en place d'un travail commun dans le respect d'autrui.
➢ Domaine 4 : Les systèmes naturels et les systèmes techniques
L'élève pratique le calcul, mental et écrit, exact et approché, il estime et contrôle les résultats, notamment en utilisant les ordres de grandeur. L'élève mène une démarche d'investigation, manipule, modélise et résout des problèmes.

Déroulé

L'activité s'étend sur deux séances. Un quart d'heure pour la mise en place de l'activité (explications, quelques exemples, répartition des élèves en petits groupes). Une phase de tests et de recherches de 20 min à 30 min. Une phase de rédaction avec aides ponctuelles du professeur. Au cours de la deuxième séance, correction de l'activité en utilisant les travaux des élèves. Synthèse générale (retour sur les fautes commises par les élèves, les étapes de la démonstration, la rédaction...).

Analyse

Une bonne partie de l'activité est à la portée de tous les élèves.
La mise en place est facile.
Les élèves rentrent rapidement dans l'activité, même les plus en difficulté.
Un vrai échange se crée entre les élèves.
Les élèves appellent facilement le professeur pour lui présenter leurs idées et lui demander de l'aide.

Annexe

Cette activité peut être réexploitée en cours de géométrie sur les transformations en faisant une interprétation géométrique de la multiplication. L'article présente comment on pourrait aborder ce sujet avec les élèves.

Technique de multiplication utilisant les compléments à 10

Voici comment calculer le produit de 8 par 6 :
• Le complément à 10 de 8 est 2 et celui de 6 est 4.
• On multiplie 2 par 4. On obtient 8, ce sera le chiffre des unités.
• On calcule ensuite la différence 8 – 4 = 4 ou bien 6 – 2 = 4 (et là, première surprise : on a le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.
• Le résultat est alors 48. Bravo !!!
Et si l'on permutait 6 et 8 ? À vous de répondre...

Voici un autre exemple : On calcule le produit de 7 par 9, c'est encore plus simple !!!
• Le complément à 10 de 7 est 3 et celui de 9 est 1.
• On multiplie alors 3 par 1, on obtient 3.
• On calcule ensuite la différence 7 – 1 = 6 ou bien 9 – 3 = 6 (on retrouve encore le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.
Le résultat est alors 63. Ça a l'air de fonctionner !!!

On peut tester cette technique sur d'autres exemples9×8 ; 7×7 ; 8×7 ; 6×9. À chaque fois, on s'aperçoit qu'on obtient le bon résultat. On conjecture ainsi un algorithme pour faire de telles multiplications.

Par curiosité, observons ce qui se passe si l'on essaye cet algorithme sur d'autres produits avec des chiffres qui ne sont pas forcément plus grand que 5 ? Prenons un exemple : 3×9 ou un autre : 4×4.
Pour 3×9 :
• Le complément à 10 de 3 est 7 et celui de 9 est 1.
• On multiplie alors 7 par 1, on obtient 7.
• On calcule ensuite la différence 3 – 1 = 2 ou bien 9 – 7 = 2 (on retrouve le même résultat). Ce dernier est le chiffre des dizaines.
Le résultat est alors 27.
Pour 4×4 :
• Le complément à 10 de 4 est 6.
• On multiplie alors 6 par 6, on obtient 36. Ce n'est plus un chiffre !!!
• On calcule ensuite la différence 4 – 6 = –2. C'est un nombre négatif. Dans l'algorithme, on l'affectait aux dizaines. Cela ne marche pas ici, sauf si l'on voit ce résultat comme étant –20.
• Dans ce cas comment récupérer 16 (qui est égal au produit de 4 par lui-même) à partir 36 et de –20 ?
• La réponse, vous la connaissez, est d'ajouter simplement 36 + (–20) = 16. Et là, on est sur une somme de nombres relatifs.

L'algorithme de calcul doit être réadapté si l'on veut faire des produits de cette manière.

Prenons un autre exemple 2×5 :
- Le complément à 10 de 2 est 8 et celui de 5 est 5.
- On multiplie alors 8 par 5, on obtient 40.
- On calcule ensuite la différence $2 - 5 = -3$ ou bien $5 - 8 = -3$ (on retrouve le même résultat). À ce dernier, on lui affecte la valeur -30.
- Le résultat est alors $-30 + 40 = 10$.

Un dernier exemple : 6×3 :
- Le complément à 10 de 6 est 4 et celui de 3 est 7.
- On multiplie alors 4 par 7, on obtient 28.
- On calcule ensuite la différence $6 - 7 = -1$ ou bien $3 - 4 = -1$. On affecte à ce résultat la valeur -10.

Le résultat est alors $-10 + 28 = 18$.

Même si cela peut donner l'impression d'avoir rendu les choses plus complexes pour des élèves ayant des difficultés de calcul, la suite va montrer qu'il est possible d'exploiter cet algorithme pour faire des calculs intéressants, et pas seulement pour des élèves en difficulté. Mais procédons d'abord à la démonstration de cette technique.

Démonstration

Notons par x et y les facteurs à multiplier. (A priori, ces facteurs sont des chiffres.) Le produit est xy.
Passons maintenant par les compléments à 10 et faisons le produit :
$(10-x)(10-y)$.
En réduisant cette expression puis en factorisant partiellement 10, on obtient :
$(10-x)(10-y) = 100 - 10(x+y) + xy$,
D'où : $xy = (10-x)(10-y) + 10(x+y) - 100$ (*)
On factorise 10 dans l'expression $10(x+y) - 100$, ce qui donne : $10(x+y-10)$.
Le facteur $x+y-10$correspond à la troisième étape de l'algorithme où il fallait faire les différences croisées : $x-(10-y) = x+y-10$ ou bien $y-(10-x) = x+y-10$.
Les deux différences donnent $x+y-10$. C'est cette dernière expression qu'on affecte aux dizaines, c'est à dire qu'il faut la multiplier par 10, ce qui donne évidement $10(x+y-10)$.

La relation (*) peut alors s'écrire sous la forme :

$$xy = \underbrace{(10-x)(10-y)} + \underbrace{10\big(x-(10-y)\big)} \quad (**)$$

Multiplication des compléments à 10	la différence entre un nombre et le complément à 10 de l'autre est associée aux dizaines

Dans la relation (**), la première expression correspond aux deux premières étapes de l'algorithme, la multiplication des compléments à 10. La deuxième expression correspond à la troisième étape de l'algorithme, la différence croisée entre un nombre de départ x (ou y) et le complément à 10 de l'autre nombre, $10 - y$ (ou $10 - x$).
La somme des deux expressions donne bien xy et correspond à la dernière étape de l'algorithme.

Discussion

Même si on a supposé au départ que x et y étaient des chiffres, on n'a aucunement utilisé ce fait. La démonstration reste donc valable pour tous les nombres quelle que soit leur nature.
C'est cette dernière conclusion qui va nous permettre de faire des calculs mentaux rapides dans le cas de quelques produits.

1. Produit de nombres décimaux proches de 10

Appliquons cet algorithme pour calculer certains produits proches de 10, par exemple $8{,}3 \times 9{,}6$. Ce produit est égal à 79,68 (calcul posé ou une calculatrice).
Avec l'algorithme :

- Le complément à 10 de 8,3 est 1,7 et celui de 9,6 est 0,4.
- On multiplie alors 1,7 par 0,4 on obtient 0,68 (ce calcul peut être fait mentalement).
- On calcule ensuite la différence 8,3 – 0,4 = 7,9.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 79.
- Le résultat est alors 79 + 0,68 = 79,68.

Faisons encore un autre exemple : $9{,}8 \times 9{,}4$ qui est égal à 92,12.
Avec l'algorithme :

- Le complément à 10 de 9,8 est 0,2 et celui de 9,4 est 0,6.
- On multiplie alors 0,2 par 0,6 on obtient 0,12.
- On calcule ensuite la différence 9,8 -0,6 = 9,2.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 92.
- Le résultat est alors 92 + 0,12 =92,12.

2. Produits de deux nombres entre 10 et 20

Appliquons l'algorithme pour calculer par exemple : 14×15. Dans ce cas, on ne peut pas parler du complément puisqu'on dépasse 10. On pourra parler d'un "complément généralisé" à 10, dans ce cas le "complément généralisé" d'un nombre plus grand que 10 est négatif. Par abus de langage, on garde pour cet exemple l'appellation « complément à 10 » pour faire simple.

- Le « complément à 10 » de 14 est 10 – 14 = –4 et celui de 15 est 10 – 15 = –5.
- On multiplie alors –4 par –5 on obtient 20.
- On calcule ensuite la différence 14 – (–5) = 14 + 5 =19.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 190.
- Le résultat est alors 190 + 20 =210.

Avec cet exemple le produit des « complément à 10 » est positif. On peut remplacer alors le « complément à 10 » par l'écart à 10. En revanche, il faut remplacer la différence croisée par une addition croisée d'un nombre de départ avec l'écart à 10 de l'autre nombre.

Appliquons ce nouvel algorithme au produit 17×18 qui, on le sait, est égal à 306.

- L'écart à 10 de 17 est 7 et celui de 18 est 8.
- On multiplie alors 7 par 8 on obtient 56.
- On calcule ensuite la somme 17 + 8 = 25.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 250.
- Le résultat est alors 250 + 56 =306.

3. Produits de deux nombres plus petits que 20

Par exemple 17×8. Utilisons l'algorithme initial avec les compléments à 10.
- Le « complément à 10 » de 17 est –7 et celui de 8 est 2.
- On multiplie alors –7 par 2 on obtient -14.
- On calcule ensuite la différence 17 – 2 = 15 ou bien 8 – (–7) = 15 aussi.
- On multiplie ce dernier par 10, on obtient 150.
- Le résultat est alors 150 + (–14) =136.

4. Produits de nombres proches de 100

La démonstration faite plus haut reste valable si l'on remplace 10 par 10^2 ou bien par une autre puissance de 10. L'algorithme fonctionnera alors avec des compléments à 10^2. Prenons l'exemple d'un produit de deux nombres entre 90 et 100, soit 96×92.
- Le complément à 100 de 96 est 4 et celui de 92 est 8.
- On multiplie alors 4 par 8 on obtient 32.
- On calcule ensuite la différence 96 – 8 = 88 ou bien 92 – 4 = 88 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 8800.
- Le résultat est alors 8800 + 32 =8832.

Un autre exemple avec des nombres plus grand que 100 : On calcule le produit 103×106
- Le « complément à 100 » de 103 est –3 et celui de 106 est –6.
- On multiplie alors –3 par –6 on obtient 18.
- On calcule ensuite la différence 103 – (–6) = 109 ou bien 106 – (–3) = 109 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 10900.
- Le résultat est alors 10900 + 18 =10918.

Voici un dernier exemple mélangeant un nombre plus grand que 100 avec un nombre plus petit que 100. On prend 109×98 :
- Le « complément à 100 » de 109 est –9 et celui de 98 est 2.
- On multiplie alors –9 par 2 on obtient –18.
- On calcule ensuite la différence 109 – 2 = 107 ou bien 98 – (–9) = 107 aussi.
- On multiplie ce dernier par 100, on obtient 10700
- Le résultat est alors 10700 + (–18) =10682.

On généralise alors cette méthode aux produits proches de 1000, 10000…

On a ainsi différents algorithmes possibles que l'on peut utiliser pour entraîner les élèves à la fois à calculer mentalement, à formaliser une démarche et à utiliser un algorithme. Le choix de l'algorithme utilisé pourra alors dépendre des nombres en jeu ou du niveau des élèves.

Point de vue géométrique

On prend l'exemple du produit $9 \times 8 = 72$. Ce produit peut être vu comme l'aire d'un rectangle de longueur 9 unités de mesure et de largeur 8 unités de mesure. Sur la figure ci-dessous, il s'agit alors de déterminer l'aire du rectangle rose. En passant par les compléments à 10, ceci nous amène à considérer ce rectangle dans un carré de côté 10 unités de mesure comme dans la 1ère figure ci-après.

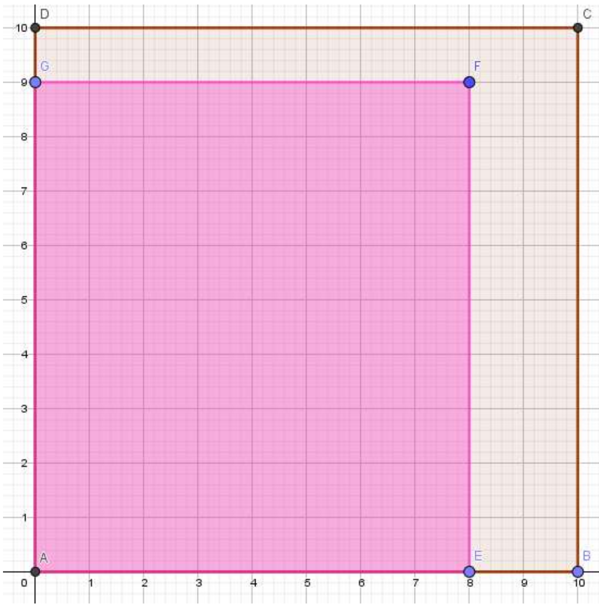


Figure 1

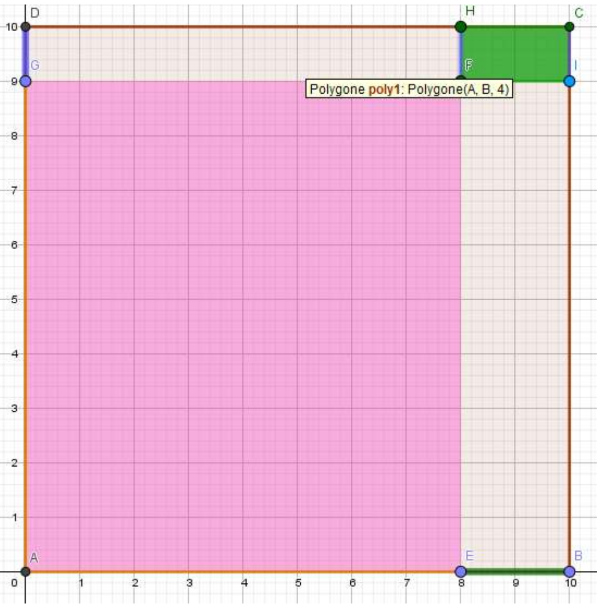


Figure 2

Les compléments à 10 des côtés vont générer un rectangle de côtés 2×1 représenté en vert sur la figure 2 ci-dessus. Si l'on veut utiliser l'aire de ce dernier dans le calcul de l'aire du rectangle rose, on doit alors retirer à ce dernier l'équivalent du rectangle vert, voir la figure 3 ci-dessous. Il nous reste alors un rectangle bleu de côtés 7×1 faisant le prolongement du rectangle enlevé, voir la figure 4.

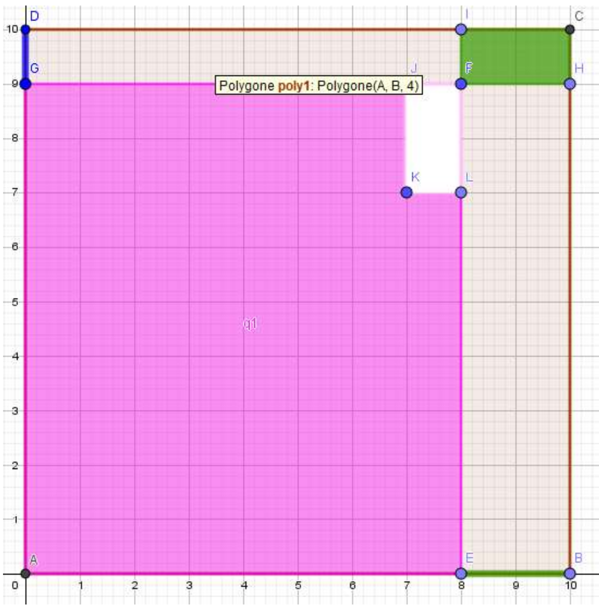


Figure 3

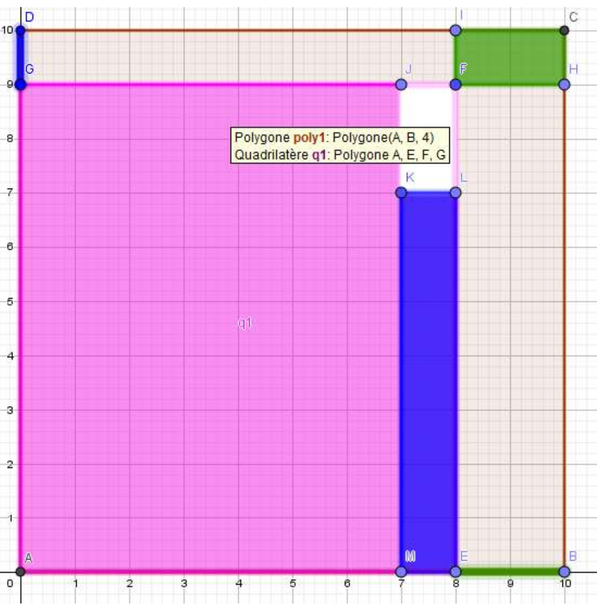


Figure 4

On découpe alors ce dernier et on le recolle au-dessus du rectangle rose pour faire un grand rectangle de côtés 10×7et d'aire 70 unités², voir la figure 5 ci-dessous.

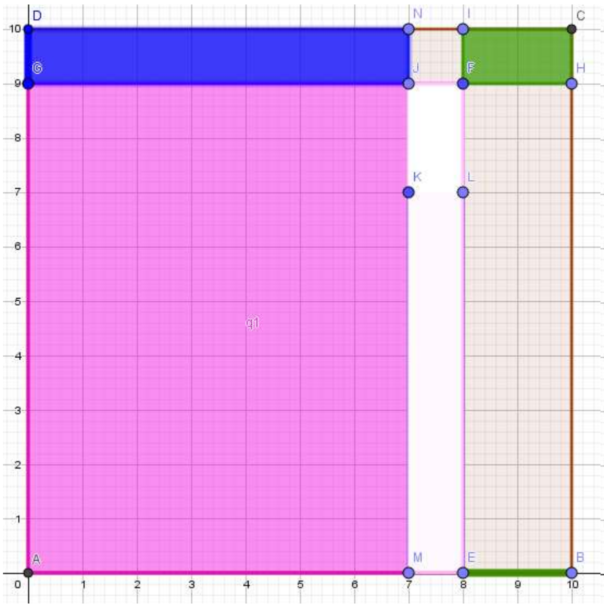


Figure 5

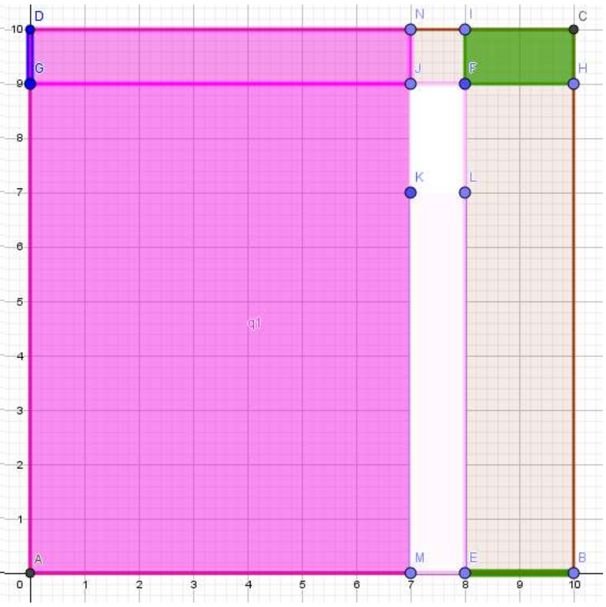


Figure 6

L'aire du rectangle rose initial est alors égale à l'aire du grand rectangle rose plus l'aire du rectangle vert, soit 72 unités.
Pour résumer, ceci revient à passer tout simplement de la figure 7 à la figure 8 ci-dessous.

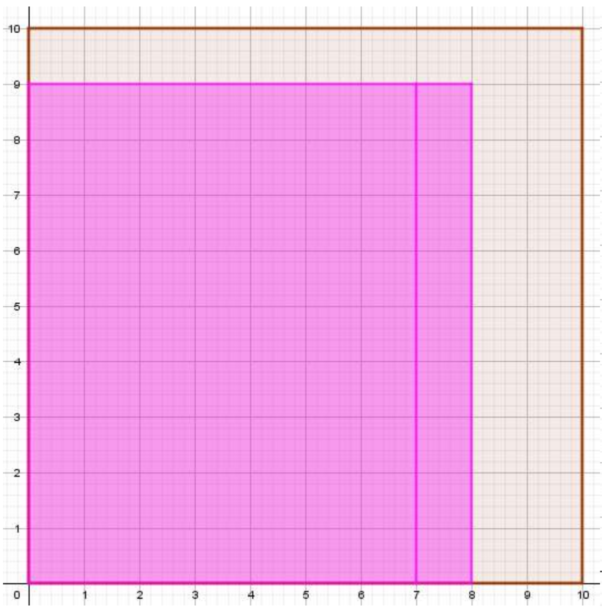


Figure 7

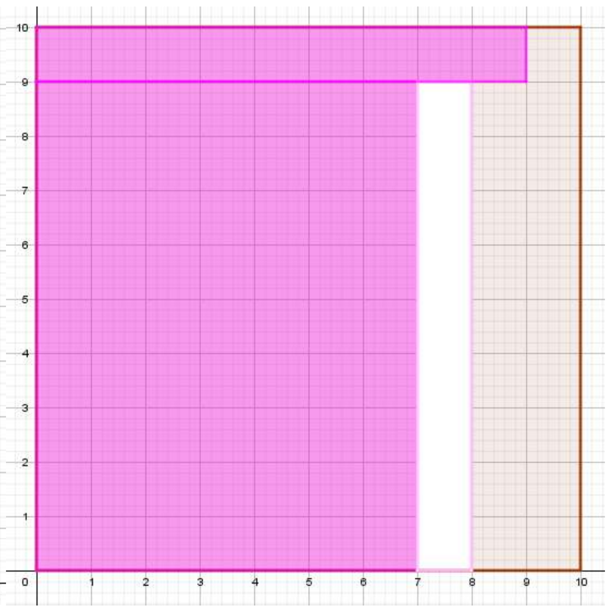
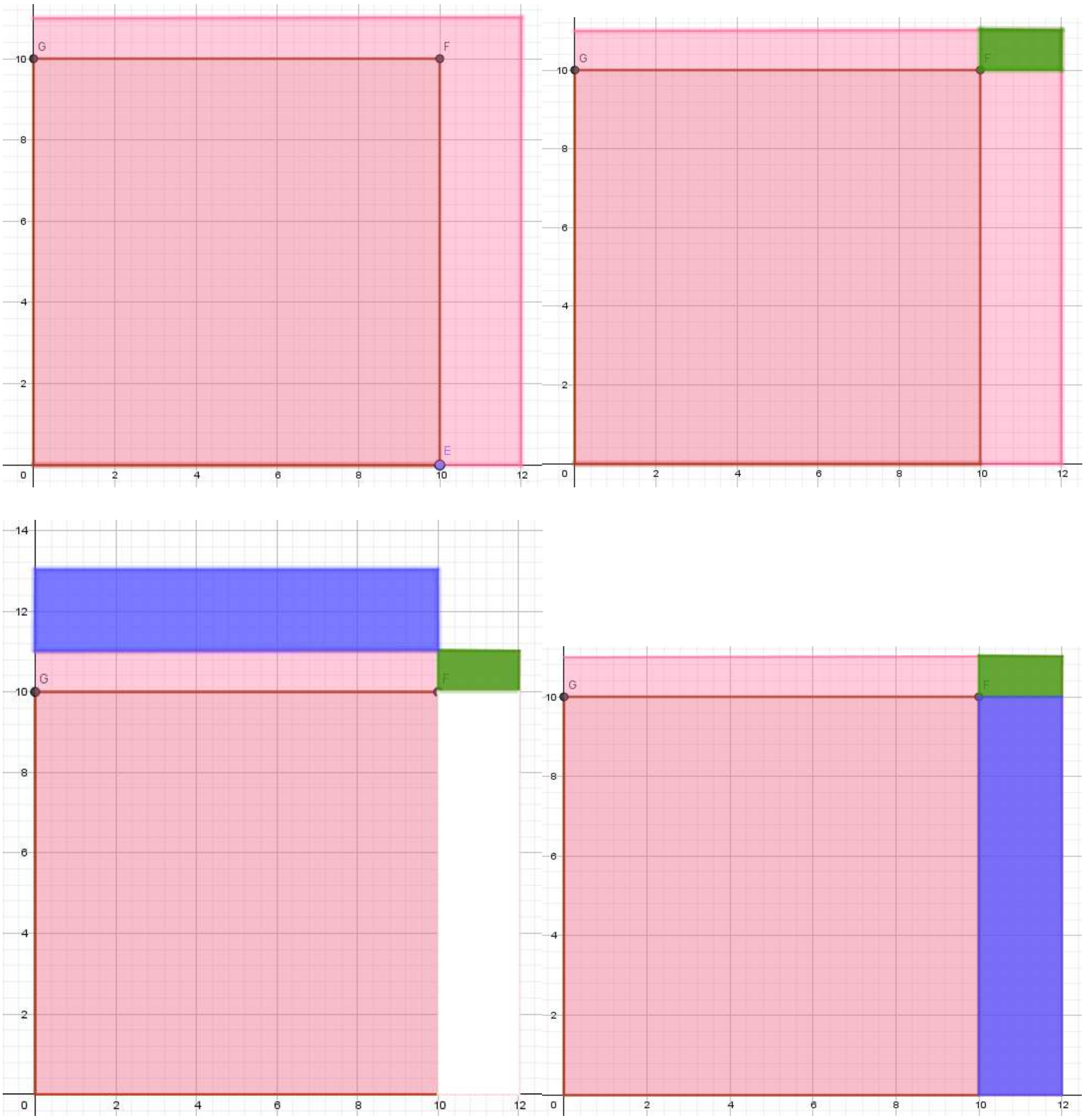


Figure 8

Avec un produit de deux nombres entre 10 et 20, voici les figures correspondantes, par exemple, au produit $12 \times 11 = 132$.

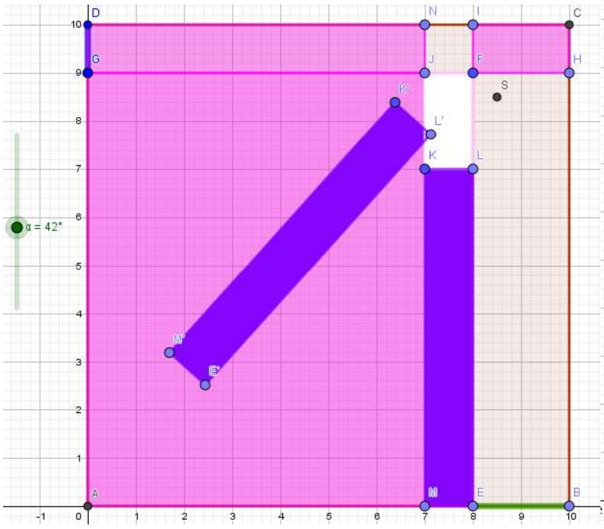


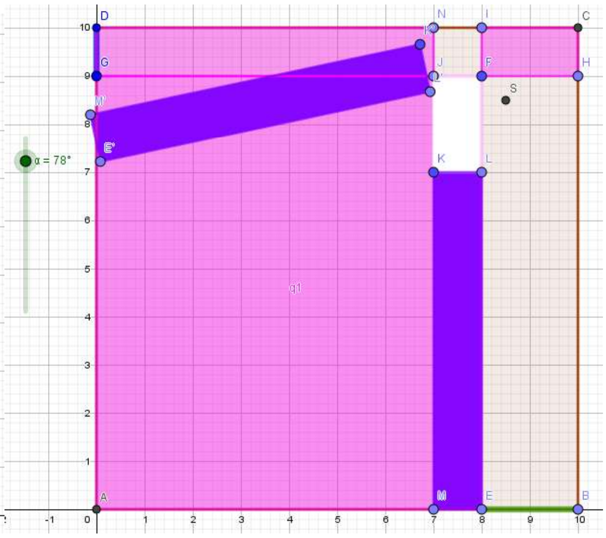
En conclusion, grâce à la démonstration d'une technique pratique que l'on montre à des élèves en difficulté pour les aider à retrouver les résultats des tables de multiplication de 5 à 9, on a pu aller au-delà en proposant aux élèves un algorithme pour calculer mentalement des produits plus complexes, en leur montrant comment faire des interprétations géométriques, en revisitant les opérations sur les relatifs et en manipulant des expressions littérales. Cela souligne une fois de plus l'importance et l'utilité de la démonstration en mathématiques.

D'autres exploitations possibles en géométrie

1. Décrire par quels mouvements on peut passer du rectangle bleu de la figure 4 au rectangle bleu de la figure 5.
(Réponse : Translation puis rotation, plusieurs solutions possibles)

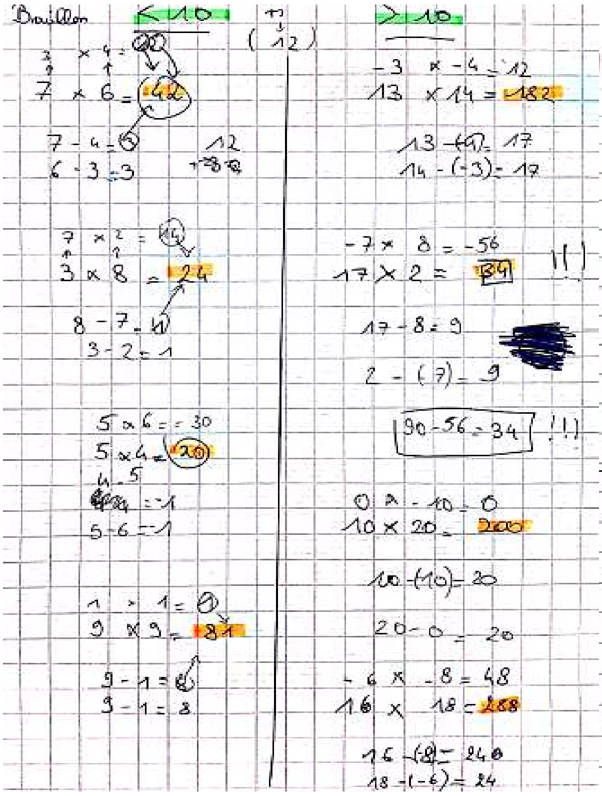
2. Peut-on passer par rotation du rectangle bleu de la figure 4 au rectangle bleu de la figure 5 ? Si oui, indiquer le centre, le sens et l'angle de rotation. Justifier votre réponse.
(Réponse : Oui, plusieurs solutions possibles)





Retour d'expérience

J'ai testé cette activité, comme tâche à prise d'initiatives, dans une classe de 3$^{\text{ème}}$ de 29 élèves, hétérogène et de niveau moyen. Le cours sur le calcul littéral a été fait plusieurs semaines auparavant. En ce qui me concerne, cela m'a pris un peu plus d'une heure et demie (une séance d'une heure, 15 minutes la séance suivante et 20 minutes pour la correction et la synthèse).
Au début de la séance, j'ai expliqué la technique aux élèves avec deux produits de chiffres plus grands que 5 (9×8 et 7×7). Certains élèves se sont demandé pourquoi on ne leur a pas montré cette technique avant la 3$^{\text{ème}}$. (Il faut donc prévoir une réponse ou un commentaire.)
Je leur ai demandé ensuite de se répartir en petits groupes de 3 ou 4 élèves, de tester cette méthode sur d'autres chiffres (plus grands que 5 puis quelconques). Ensuite avec deux facteurs l'un plus petit que 10 et l'autre entre 10 et 20. Puis avec des nombres entre 10 et 20. Enfin avec des nombres quelconques. Tout cela m'a pris une quinzaine de minute.
A un moment ou à un autre, tous les groupes se sont arrêtés sur un exemple où le produit des compléments à 10 n'est pas un chiffre mais un nombre à deux ou trois chiffes (100). Certains ont réussi à trouver rapidement la parade mais d'autres m'ont appelé pour évoquer ce problème. Une fois le voile levé sur cette difficulté, un véritable émerveillement apparut sur le visage de chacun des élèves et on voyait clairement qu'ils venaient de découvrir quelque chose de simple mais aussi de mystérieux. Certains élèves sont allés jusqu'à tester des produits entre deux nombres à plusieurs chiffres pour s'assurer de la validité de la technique. Voici des exemples de tests faits par des groupes d'élèves.


Brouillon <10 (12) >10

3 × 4 = 12
7 × 6 = 42
7 - 4 = 3
6 - 3 = 3
12 + 30

-3 × -4 = 12
13 × 14 = 182
13 - (-4) = 17
14 - (-3) = 17

7 × 2 = 14
3 × 8 = 24
8 - 7 = 1
3 - 2 = 1

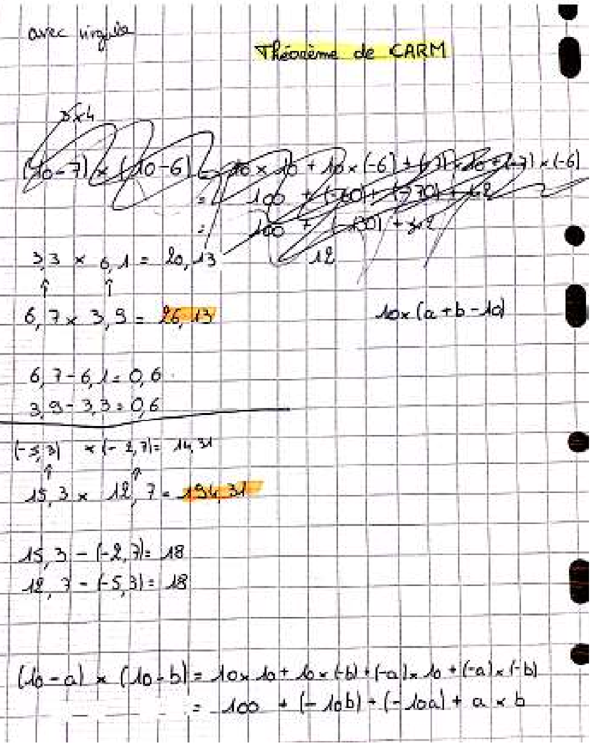
-7 × 8 = -56
17 × 2 = 34
17 - 8 = 9
2 - (-7) = 9
90 - 56 = 34 !!

5 × 6 = 30
5 × 4 = 20
4 - 5 = -1
5 - 6 = -1

0 × -10 = 0
10 × 20 = 200
10 - (-10) = 20
20 - 0 = 20

1 × 1 = 0
9 × 9 = 81
9 - 1 = 8
9 - 1 = 8

-6 × -8 = 48
16 × 18 = 288
16 - (-8) = 24
18 - (-6) = 24


avec virgule

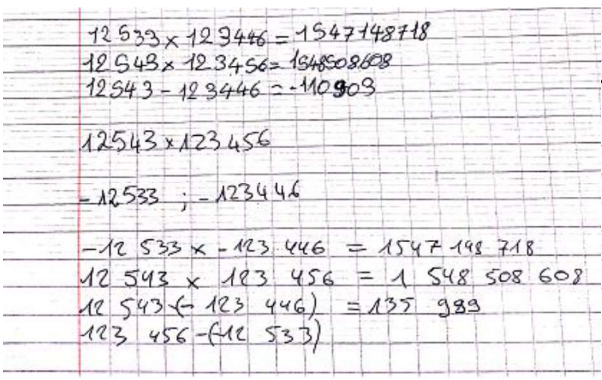
Théorème de CARM

3,3 × 6,1 = 20,13
6,7 × 3,9 = 26,13
6,7 - 6,1 = 0,6
3,9 - 3,3 = 0,6

10 × (a + b - 10)

(-3,3) × (-2,7) = 14,31
15,3 × 12,7 = 194,31
15,3 - (-2,7) = 18
12,7 - (-5,3) = 18

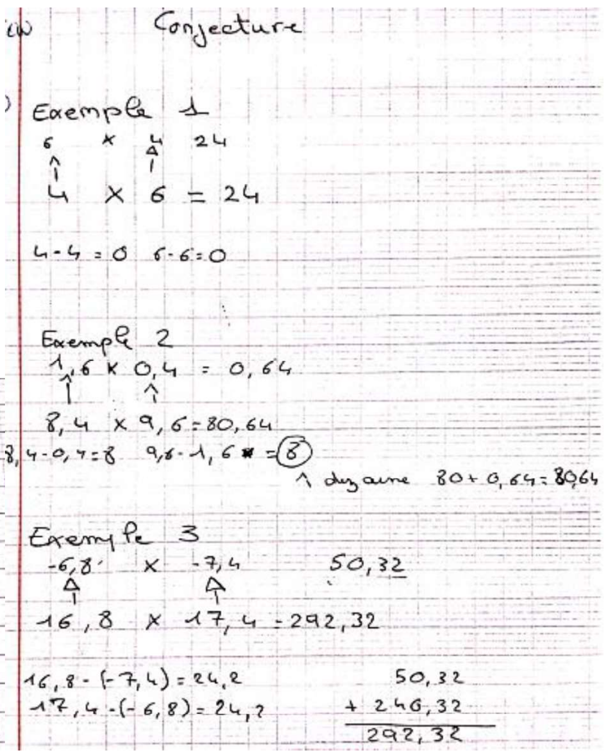
(10 - a) × (10 - b) = 10 × 10 + 10 × (-b) + (-a) × 10 + (-a) × (-b)
= 100 + (-10b) + (-10a) + a × b


12 533 × 123 446 = 1547148718
12 543 × 123 456 = 1548508608
12 543 - 123 446 = -110 903

12543 × 123 456

-12533 ; -123446

-12 533 × -123 446 = 1 547 148 718
12 543 × 123 456 = 1 548 508 608
12 543 - (-123 446) = 135 989
123 456 - (-12 533)


Conjecture

Exemple 1
6 × 4 24
4 × 6 = 24
4 - 4 = 0 6 - 6 = 0

Exemple 2
1,6 × 0,4 = 0,64
8,4 × 9,6 = 80,64
8,4 - 0,4 = 8 9,6 - 1,6 = 8
dizaine 80 + 0,64 = 80,64

Exemple 3
-6,8 × -7,4 50,32
16,8 × 17,4 = 292,32
16,8 - (-7,4) = 24,2
17,4 - (-6,8) = 24,2
50,32 + 242,32 = 292,32

Cette période de tests a pris une vingtaine de minutes. Certains élèves ont bien émis une conjecture et d'autres pensaient déjà au théorème qui va porter le nom de leur groupe.
J'ai demandé ensuite aux élèves de chercher une démonstration pour pouvoir valider cette technique. Il fallait ensuite la rédiger et rajouter quelques exemples sur la feuille de réponse.
Après quelques minutes, la majorité des élèves ont bien senti qu'il fallait passer par le calcul littéral pour faire la démonstration. La rumeur s'est propagée rapidement à l'ensemble de la classe. Certains élèves ont introduit plusieurs lettres et ont pâti par la suite de ce choix. D'autres ont pris seulement deux lettres pour le début et m'ont appelé pour demander mon avis et comment il fallait faire pour continuer.
A la fin de la séance, un groupe de filles avait bien trouvé la démonstration. Ces élèves étaient fières d'avoir enfin leur théorème (théorème de CARM en référence à Clara, Aurélie, Romane et Maely). Un groupe avait presque fini. Un autre groupe s'est perdu dans les lettres malgré un bon départ. D'autres groupes avaient commencé avec des lettres mais ils n'ont pas su aller plus loin et un dernier groupe est resté sur des exemples sans pouvoir aller plus loin.
Au début de la séance suivante, j'ai donné un quart d'heure supplémentaire aux élèves pour finir la démonstration et rédiger au propre leurs réponses. Pour la correction, j'ai fait passer au tableau une fille du groupe CARM. J'ai répondu ensuite à quelques questions et j'ai fait une synthèse du travail fait par les groupes. J'ai montré ensuite aux élèves l'interprétation géométrique de cette technique.
Les élèves ont bien rendu des copies propres mais au-delà de l'aspect mathématique, leur rédaction s'est limitée à peu de phrases et d'explications, malgré le travail qui est fait régulièrement (lors des séances d'exercices par exemple) sur l'importance de la rédaction.

Je présente pour terminer quelques copies d'élèves qui illustrent bien le travail de l'ensemble des groupes.

Aurélie
Clara
Romane G.
Maely
3°D

Mathématiques

< 10

3 × 4 = 12
7 × 6 = 42
7 − 4 = 3
6 − 3 = 3

7 × 2 = 14
3 × 8 = 24
3 − 2 = 1
8 − 7 = 1

10
30 ·
5 × 6 = 30
5 × 4 = 20
5 − 6 = 1
4 − 5 = 1

1 × 1 = 1
9 × 9 = 81
9 − 1 = 8
9 − 1 = 8

> 10

−3 × (−4) = 12
13 × 14 = 182
13 − (−4) = 17
14 − (−3) = 17

−7 × 8 = −56
17 × 2 = 34
17 − 8 = 9
2 − (−7) = 9
90 − 56 = 34

0 × (−10) = 0
10 × 20 = 200
10 − (−10) = 20
20 − 0 = 20

−8 × −6 = 48
18 × 16 = 288
18 − (−6) = 24
16 − (−8) = 24

avec virgule

3,3 × 6,1 = 20,13
6,7 × 3,9 = 26,13

6,7 − 6,1 = 0,6
3,9 − 3,3 = 0,6

(−5,3) × (−2,7) = 14,31
15,3 × 12,7 = 194,31

15,3 − (−2,7) = 18
12,7 − (−5,3) = 18

$10 \times (a - b) = c$

$(10 - a) \times (10 - b) = c$

$a \times b = x$ $\qquad x$

$a - (10 - b) = d$
$b - (10 - a) = d$

$10 \times (a + b - 10)$

d = chiffre des dizaines
c = chiffre des unités

$(10 - a) \times (10 - b) = 10 \times 10 + 10 \times (-b) + (-a) \times 10 + (-a) \times (-b)$
$= 100 + (-10b) + (-10a) + a \times b$

$(10 - a) \times (10 - b) + 10 \times (a + b - 10)$

$10 \times (a + b - 10) = 10a + 10b - 100$

$x = 100 + (-10b) + (-10a) + a \times b + 10a + 10b - 100$
$= a \times b$

Avec la démonstration ci-dessus, on peut voir que la technique marche bien car $(10 - a) \times (10 - b) + 10 \times (a + b - 10)$ est bien égale à $a \times b$.

MATHS

18/04/19

NOTE :

OBSERVATIONS :

D'abord, on teste cette technique sur des chiffres inférieurs à 10.

5 x 2

ex : 5 x 8 = 40

8 - 5 = 3

5 - 2 = 3

→ Cette technique a l'air de fonctionner pour les chiffres inférieurs à 10.

On teste maintenant avec des nombres supérieurs à 10

$-5 \times 7 \Rightarrow -35$

$15 \times 3 = 45$

$15 - 7 = 8 \rightarrow 80$ 8

$80 + (-35)$

$$\begin{array}{r} 80 \\ -\ 35 \\ \hline 45 \end{array}$$

→ Cette techique à l'air de fonctionner pour les chiffes supérieurs à 10.

Enfin, on test avec ~~un~~ des chiffres supérieurs à 20 :

$$-10 \times -15 = 150$$

$$20 \times 25 = 500$$

- $20 - (-15) = 35$
- $25 - (-10) = 35$

$\rightarrow 350$

$$\begin{array}{r} 150 \\ +\ 350 \\ \hline 500 \end{array}$$

→ Cette technique fonctionne avec des chiffres supérieurs à 20.

Démonstration :

Conjecture

Exemple 1

6 × 4 24

4 × 6 = 24

4 - 4 = 0 6 - 6 = 0

Exemple 2

1,6 × 0,4 = 0,64

8,4 × 9,6 = 80,64

8,4 - 0,4 = 8 9,6 - 1,6 = 8

dizaine 80 + 0,64 = 80,64

Exemple 3

-6,8 × -7,4 50,32

16,8 × 17,4 = 292,32

16,8 - (-7,4) = 24,2

17,4 - (-6,8) = 24,2

$$\begin{array}{r} 50,32 \\ +\ 246,32 \\ \hline 292,32 \end{array}$$

Exemple 4

-5,7 × 3,3 = -18,81

15,7 × 6,7 = 105,19

15,7 - 3,3) 12,4 × 10 = 124

6,7 - (-5,7) 12,4 × 10 = 124

$$\begin{array}{r} 124 \\ -\ 18,81 \\ \hline 105,19 \end{array}$$

N Démonstration

$x + x_1 = 10$ $\quad$ $y + y_1 = 10$

$x_1 \times y_1 = x_2$

$x \times y = b$

$x - y_1 = a$ $\quad$ Résulta $= a \times 10 + x_2$

$y - x_1 = a$ $\quad$ $= a_1 + x_2$

Je pose $\quad$ $a_1 = 10a$.

$x_1 = 10 - x$ $\quad$ $y_1 = 10 - y$

je sais que

$x - y_1 = y - x_1$

car

$x - (10 - y) = y - (10 - x)$

si je connais le produit

$x_1 \times y_1 = x_2$

Alors si je connais le produit

$b = xy$

$b = x_2 + 10(x - y)$

$b = x_2 + 10(x - 10 + y)$

$b = x_2 + 10x + 10y - 100$

$b = x_2 + 10(x + y) - 100$

et on peut vérifier car

$100 - 10x - 10y = b - x_2$

Noélie, Romane, Nancy

7 ↑ 4 ↑

3 × 6 = 18

7 × 4 = 28
−10
18

3 − 4 = −1 dizaine

5 ↑ 2 ↑

5 × 8 = 40

5 × 2 = 10
5 − 2 = 30
40

8 ↑ 3 ↑

2 × 7 = 14

8 × 3 = 24
−10
14

2 − 3 = −1

7 − 8 = −1

5 ↑ 6 ↑

5 × 4 = 20

5 × 6 = 30
−10
20

5 − 6 = −1

−2 ↑ −1 ↑

12 × 11 = 132

= 2 × (−1) = +2

~~12 − 1 = 11~~

~~11 − 2 = 9~~

12 − (−1) = 13

11 − (−2) = 13

→ 130

a × b = c × d − e − f