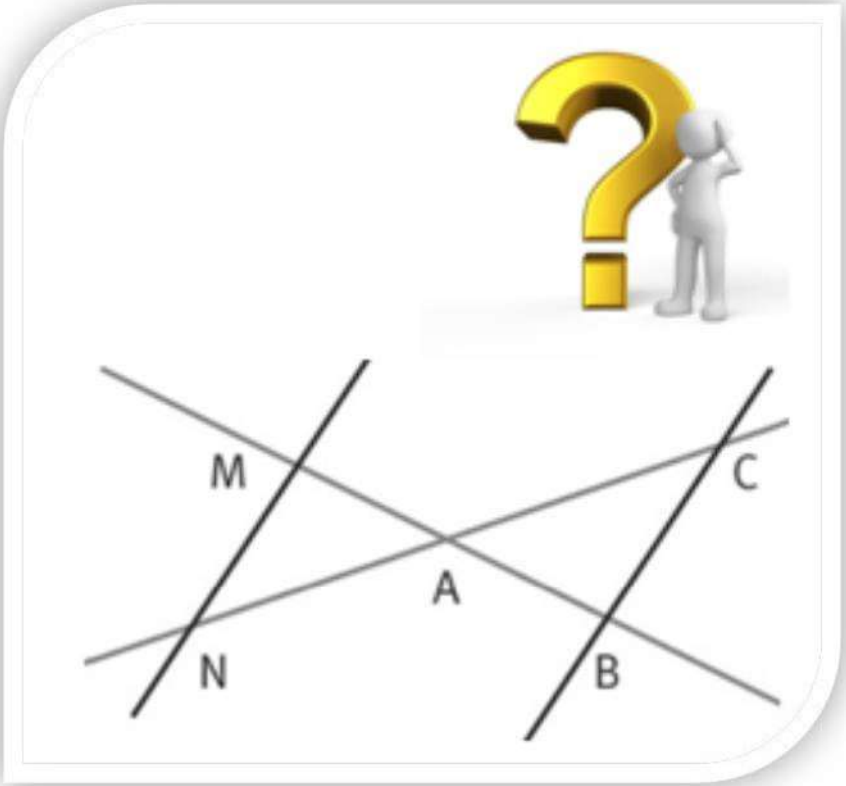
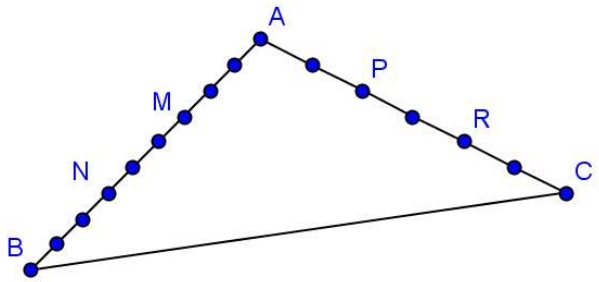
C. La réciproque du théorème de Thalès

Martine BRUNSTEIN - Collège du Parc de Sucy en Brie (94)
Niveau : 3ème
Durée : 2 séances



1. Observation

Chaque élève contrôle et complète :



$\frac{AM}{AB}$ = ... ; $\frac{AP}{AC}$ = ...

Dans les triangles AMP et ABC, *on constate que* les droites .....sont .....

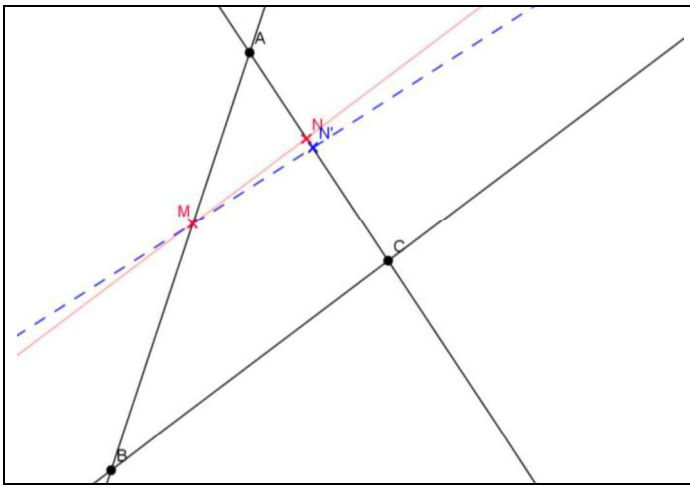
$\frac{AN}{AB}$ = ... ; $\frac{AR}{AC}$ = ...

Dans les triangles ANR et ABC, *on constate que* les droites .....sont .....

2. Conjecture élaborée collégialement

3. Démonstration dans un cas particulier

Il est demandé à chaque élève d'écouter attentivement l'exposé de la démonstration par le professeur comme lorsqu'on écoute « une conférence ».
A chaque étape il est demandé de dire son accord avec ce qui vient d'être écrit au tableau.
Chaque demande est prise en compte et le professeur ne poursuit qu'avec l'accord général.
Les élèves sont très attentifs et participent.
En voici le déroulé :

	On sait que : M ∈ (AB) N ∈ (AC) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$ *k* un nombre positif

Démonstration faite au tableau

On suppose que la droite parallèle à (BC) passant par le point M coupe la droite (AC) en un point N' tel que les points N et N' soient distincts.

D'après le théorème de Thalès on peut écrire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$$

Mais

$$\frac{AM}{AB} = k$$

Donc

$$\frac{AN'}{AC} = k$$

On sait aussi que

$$\frac{AN}{AC} = k$$

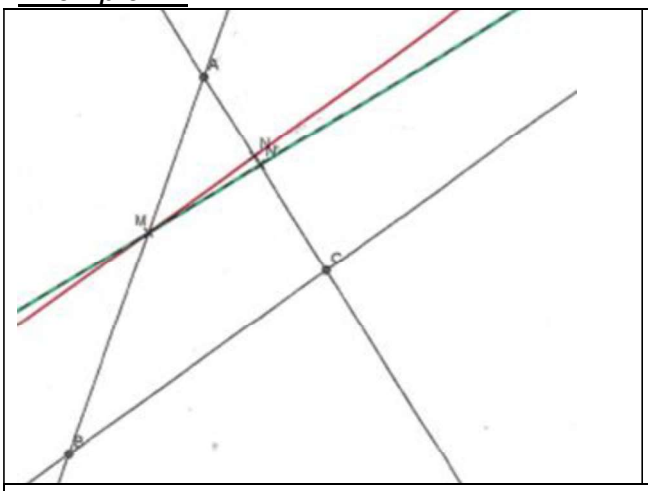
Donc

$$\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$$

Donc
AN' = AN
Donc N et N' sont confondus.

4. Au cours suivant, il est demandé de réécrire la démonstration écoutée la veille. Les élèves travaillent en groupe puisque installés en ilots. De manière surprenante, puisqu'ils n'ont fait qu'écouter sans prise de notes, ils se souviennent assez bien de ce qui a été dit le cours précédent. Voici quelques exemples de restitution :

Exemple 1 :



On sait que :

M ∈ (AB)
N ∈ (AC)

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k} \quad (1)$$

k un nombre positif

On suppose que la droite parallèle à (BC) passant par le point M coupe la droite (AC) en un point N' tel que les points N et N' soient distincts.

D'après le théorème de Thalès on peut écrire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC} =$$

Mais on sait que d'après le renseignement (1)

$$\frac{AM}{AB} = k$$

Donc on peut écrire

$$\boxed{\frac{AN'}{AC} = k}$$

On sait d'après le renseignement (1) aussi que $\frac{AN}{AC} = k$

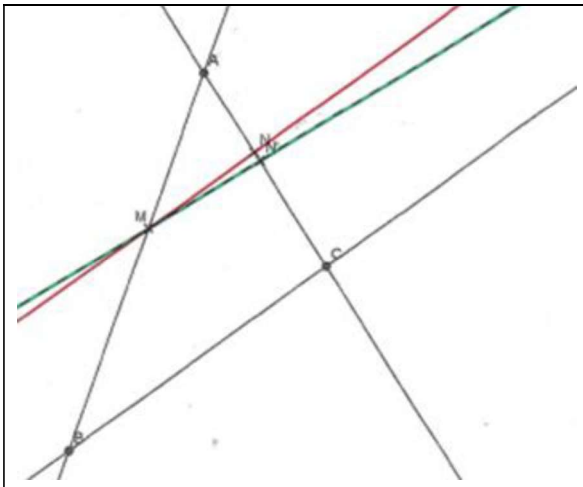
Donc on peut écrire que $\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$

On a deux fractions qui ont le même dénominateur qui sont égales donc AN' = AN

Donc les points N et N' sont égaux

C'est-à-dire que les droites MN et BC sont parallèles et que les droites N et N' sont sécantes.

Exemple 2 :



On sait que :

M ∈ (AB)
N ∈ (AC)

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k} \quad (1)$$

k un nombre positif

Droites sécantes (AB) et (AC)
Droites parallèles (MN') et (BC)

On suppose que la droite parallèle à (BC) passant par le point M coupe la droite (AC) en un point N' tel que les points N et N' soient distincts.

D'après le théorème de Thalès on peut écrire :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$

Mais on sait que d'après le renseignement 1

$$\frac{AM}{AB} = k$$

Donc on peut écrire

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AN'}{AC} =$

On sait d'après le renseignement (1) aussi que $\frac{AN}{AC} = k$

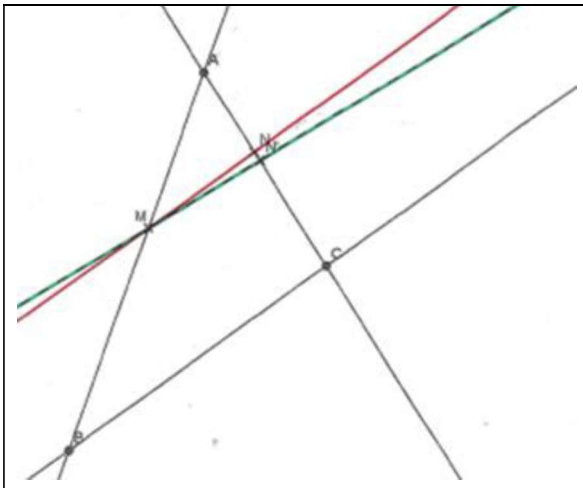
Donc on peut écrire que $\frac{AN'}{AC} = k$

On a deux fractions qui ont le même dénominateur qui sont égales donc $AN = AN'$

Donc les points N et N' sont confondus

C'est-à-dire que les droites (AN) et (AN') sont parallèles

Exemple 3 :



On sait que :

M ∈ (AB)
N ∈ (AC)

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k} \quad (1)$$

k un nombre positif

Droites sécantes (AB) et (AC)
Droites parallèles (MN') et (BC)

On suppose que la droite parallèle à (BC) passant par le point M coupe la droite (AC) en un point N' tel que les points N et N' soient distincts.

D'après le théorème de Thalès on peut écrire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$$

Mais on sait que d'après le renseignement (1)

$$\frac{AM}{AB} = k$$

Donc on peut écrire

$$\boxed{\frac{AN'}{AC} = k}$$

On sait d'après le renseignement (1) aussi que $\frac{AN}{AC} = k$

Donc on peut écrire que $\boxed{\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}}$

On a deux fractions qui ont le même dénominateur qui sont égales donc les numérateurs AN' et AN sont égaux

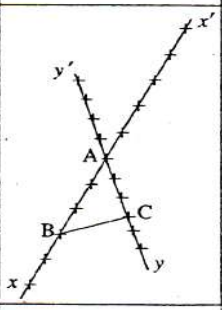
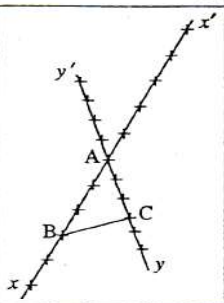
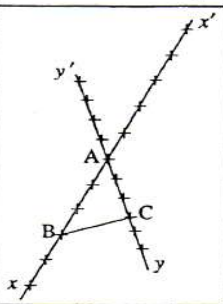
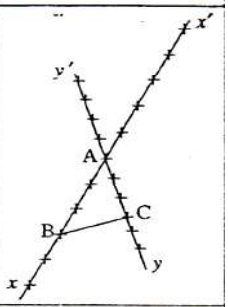
Donc les points N et N' sont confondus.

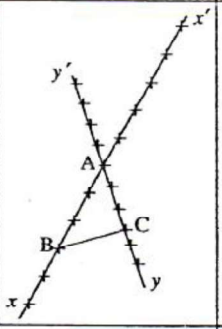
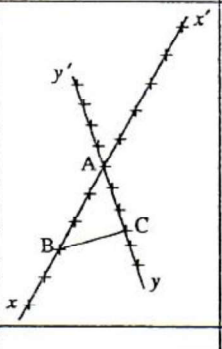
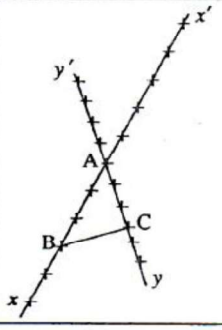
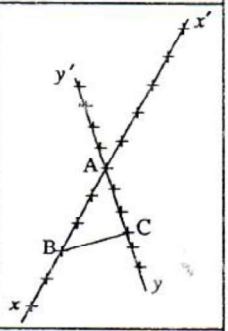
C'est-à-dire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

5. Enoncé de la propriété qu'on pense avoir démontré ensemble.

6. Vérification :

* activité GeoGebra : construction de la figure et génération de différents cas.
* activité papier.

	1	2	3	4
Pour chaque dessin placer les points M et N tels que :	$M \in [Ax)$, $N \in [Ay)$, $k = \frac{1}{3}$	$M \in [Ax)$, $N \in [Ay')$, $k = \frac{2}{3}$	$M \in [Ax')$, $N \in [Ay)$, $k = \frac{5}{6}$	$M \in [Ax')$, $N \in [Ay')$, $k = \frac{1}{3}$
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$				
① Position relative des points A, B et M				
② Position relative des points A, C et N				
(MN) et (BC) sont-elles parallèles ?				

	5	6	7	8
Pour chaque dessin placer les points M et N tels que :	$M \in [Ax)$, $N \in [Ay)$, $k = \frac{5}{3}$	$M \in [Ax)$, $N \in [Ay')$, $k = \frac{7}{6}$	$M \in [Ax')$, $N \in [Ay)$, $k = \frac{3}{2}$	$M \in [Ax')$, $N \in [Ay')$, $k = \frac{4}{3}$
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$				
① Position relative des points A, B et M				
② Position relative des points A, C et N				
(MN) et (BC) sont-elles parallèles ?				

7. Découverte des cas qui ne correspondent pas à la conjecture.

8. Ecriture de la condition supplémentaire pour le parallélisme des droites.

9. Application immédiate de la propriété sur des exemples.

CHERCHER :
S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
Domaines du socle : 1, 3

RAISONNER :
Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.
Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Domaines du socle : 2, 3, 4

COMMUNIQUER :
Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.
Domaines du* socle *: 1, 3