D. Égalité vraie ou égalité fausse ?

Alberto AHUMADA
Collège Roger MARTIN DU GARD, 93 Epinay-sur-Seine
Niveau : $4^{\text{ème}}$ – $3^{\text{ème}}$

Contexte et prérequis

Cette activité a été proposé à trois classes de niveau $3^{\text{ème}}$, ce qui a permis de travailler sur le statut des égalités entre deux expressions littérales.

En amont de ce travail, les élèves ont travaillé sur :
- Le rappel des priorités opératoires et l'analyse de la structure d'une expression (somme, différence, produit) ;
- La production d'expressions littérales dans des contextes variés (à partir d'un programme de calcul, du périmètre ou de l'aire d'une figure, etc.)

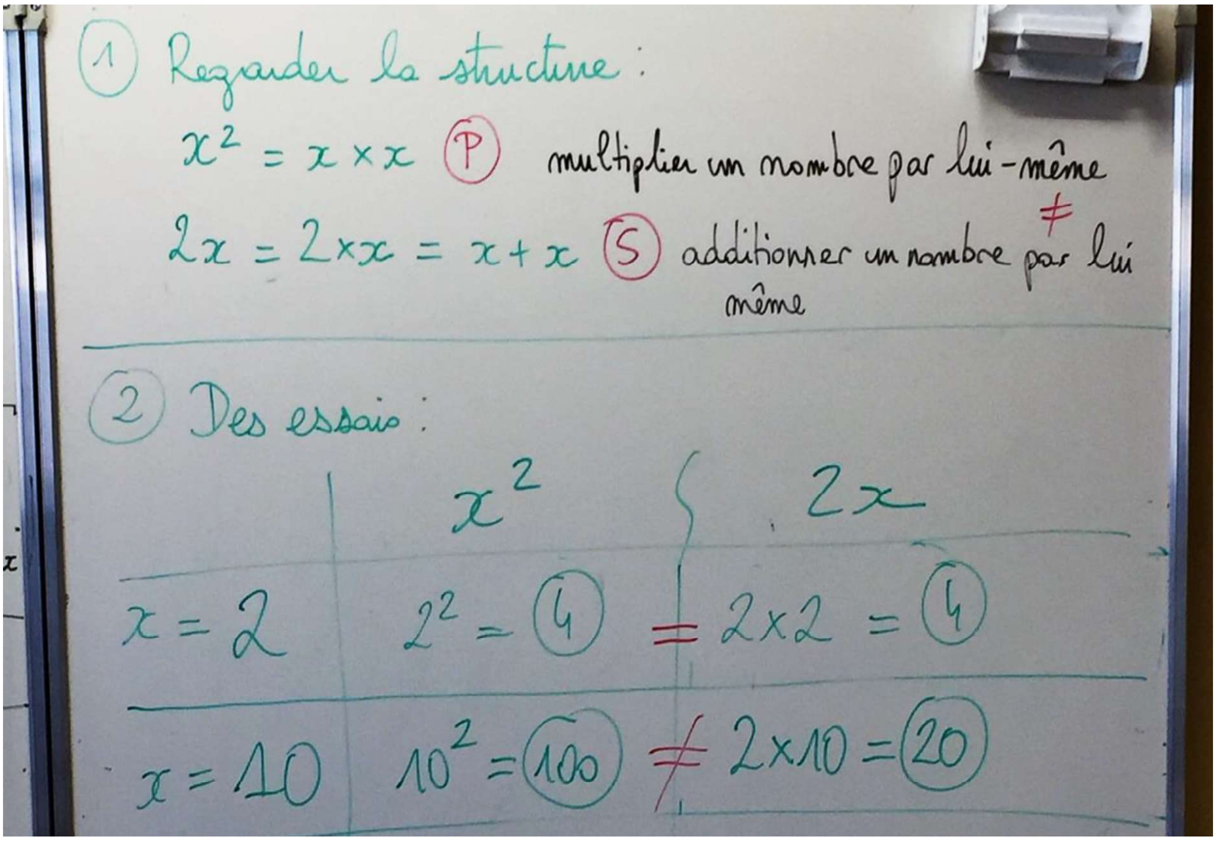
L'énoncé et le déroulé de l'activité

Voici trois égalités.
Pour chacune d'elles, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en JUSTIFIANT LA REPONSE.

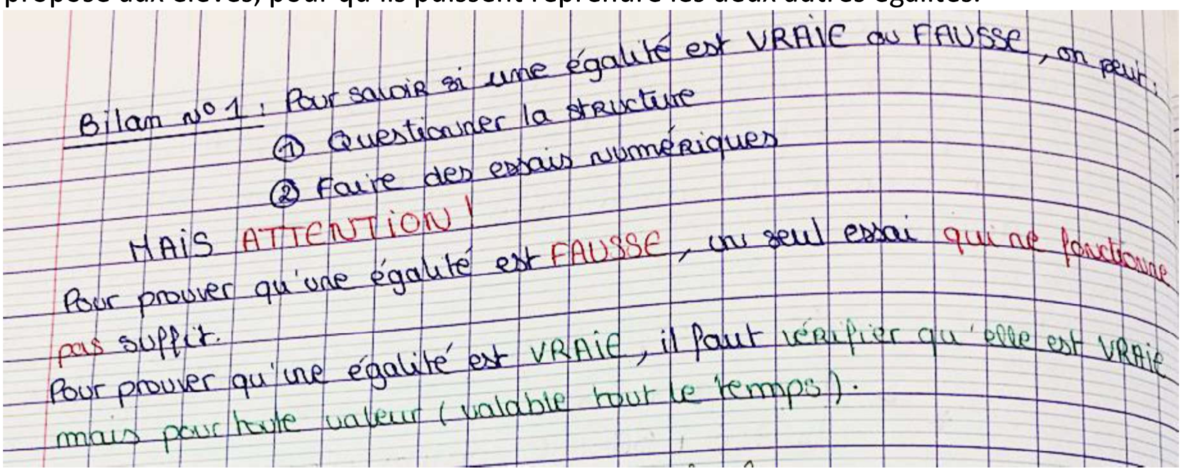
Une égalité	Vraie ou Fausse ?	Justification
$x^2 = 2x$		
$3 + 7x = 10x$		
$7 \times (x + 8) = 7x + 56$		

Une fois l'énoncé distribué, les élèves ont entre 5 et 10 minutes de temps de recherche pour statuer sur les égalités et apporter des éléments de justification. L'enseignant circule activement pour repérer et catégoriser les différents arguments mobilisés par les élèves. Une majorité d'élèves n'a pas vraiment réussi à justifier leur choix.

Un premier temps de synthèse collective est proposé pour la première égalité. Une majorité d'élèves estime qu'il s'agit d'une égalité fausse, mais les arguments mobilisés sont peu convaincants. L'enseignant intervient alors pour proposer deux types d'arguments, comme l'illustre ce travail mené au tableau avec l'aide des élèves.

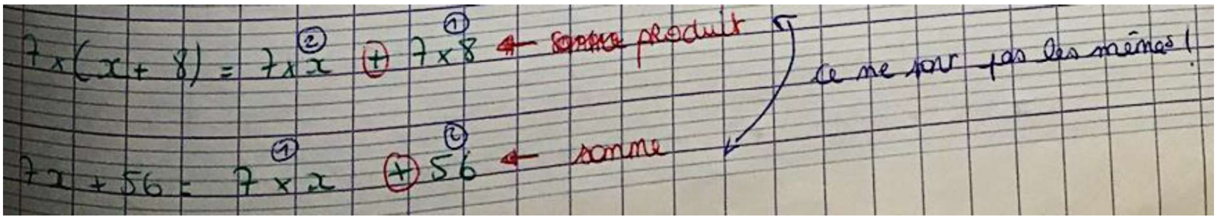


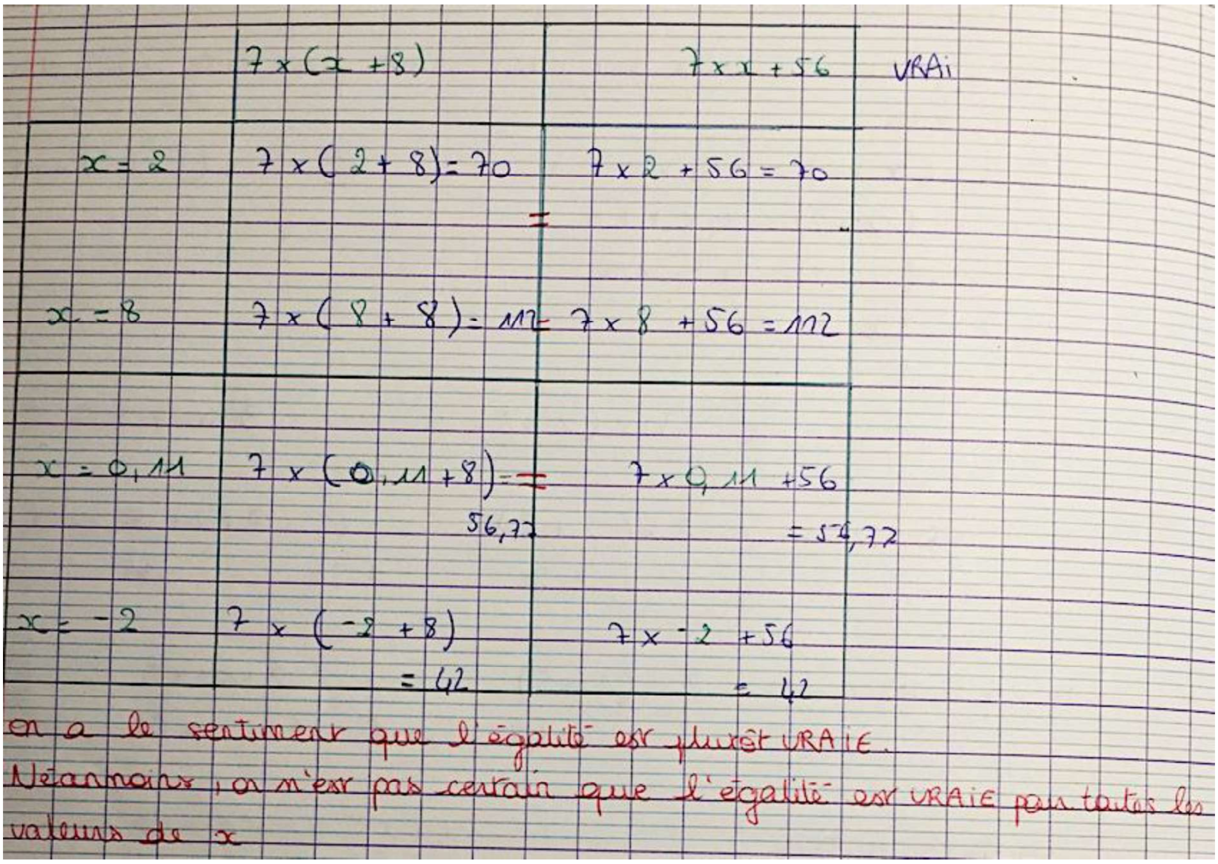
La structure des expressions a été travaillée en amont, les élèves ont donc rapidement conscience qu'ici le produit et la somme d'un nombre avec lui-même ne donneront pas toujours le même résultat. Des essais numériques sont ensuite menés pour évaluer le statut de l'égalité. C'est une excellente manière d'introduire la touche $\boxed{\text{CALC}}$ de la calculatrice qui permet de réaliser plus efficacement ces essais numériques. Un premier bilan est donc proposé aux élèves, pour qu'ils puissent reprendre les deux autres égalités.



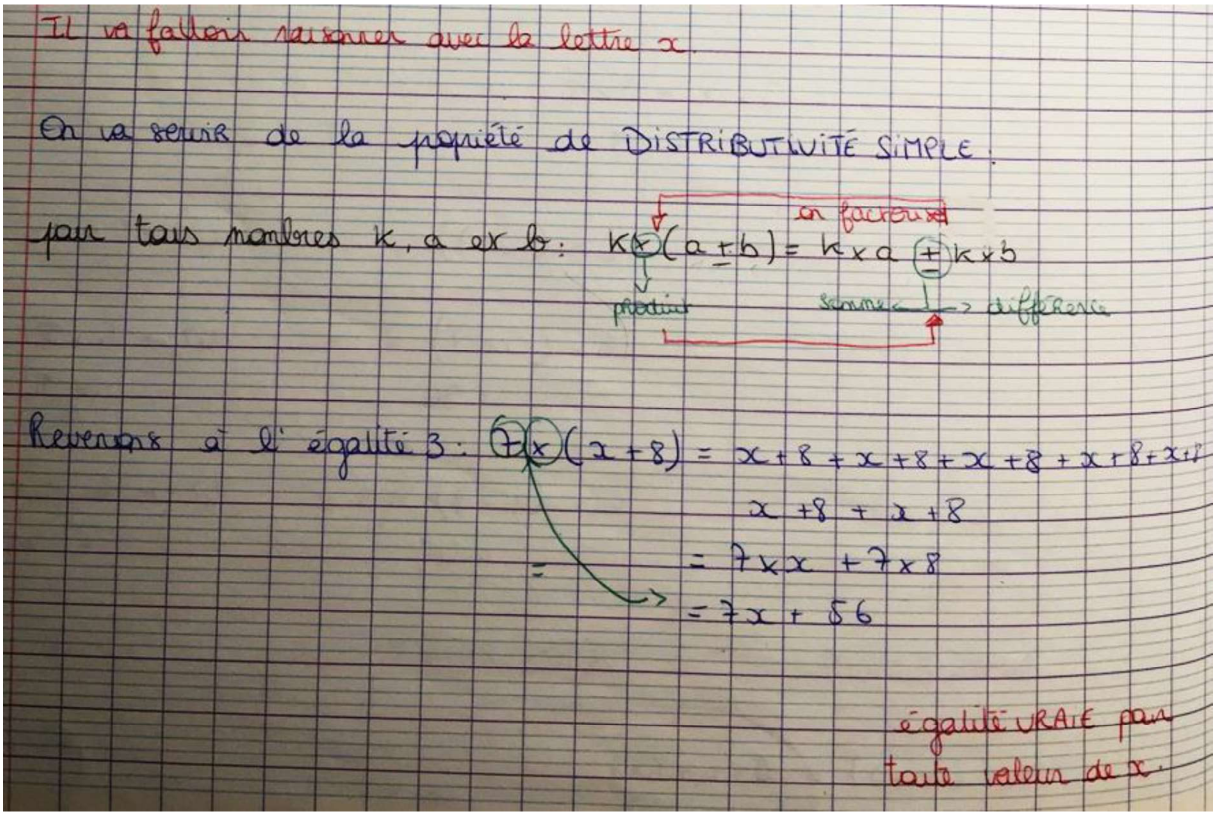
Après un bref temps de recherche, nous revenons sur l'égalité n°2. De la même manière, on peut questionner la structure des expressions littérales et mener des essais numériques.

Pour la dernière égalité, les élèves sont déjà plus outillés grâce au travail mené pour les deux précédentes situations. Néanmoins, un paradoxe apparaît : l'analyse des structures des expressions montre que le membre de gauche est un produit alors que le membre de droite est une somme, alors que les essais numériques semblent montrer que l'égalité est vraie…





Cette situation révèle donc à la fois l'insuffisance de l'analyse des structures d'expressions mais aussi des essais numériques, ce qui permet d'introduire la propriété de distributivité de la multiplication comme étant un outil incontournable pour justifier l'équivalence de deux expressions littérales. Si l'on peut espérer que les élèves de 3ème aient déjà fréquenté cette propriété, un rappel est toujours salutaire !


Il va falloir raisonner avec la lettre x

On va se servir de la propriété de DISTRIBUTIVITÉ SIMPLE

on factorise

pour tous nombres k, a et b : $k \times (a \pm b) = k \times a \pm k \times b$

produit   somme → différence

Revenons à l'égalité 3 : $7 \times (x + 8) = x + 8 + x + 8 + x + 8 + x + 8 + x + 8$
$x + 8 + x + 8$
$= 7 \times x + 7 \times 8$
$= 7x + 56$

égalité VRAIE pour toute valeur de x.

On pourra noter que pour les élèves les plus fragiles, il peut être intéressant de s'appuyer sur le sens de la multiplication comme étant une addition itérée :

$$7 \times (x+8) = (x+8) + (x+8) + (x+8) + (x+8) + (x+8) + (x+8) + (x+8)$$

Puis de procéder à la réduction de l'expression obtenue. Les élèves ne sont d'ailleurs pas tous très à l'aise avec la réduction d'expressions littérales, point qui sera alors travaillé dans une séquence suivante.

Une fois la preuve réalisée, un travail d'entraînement supplémentaire est proposé.

Voici quatre égalités.
Pour chacune d'elles, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en JUSTIFIANT LA REPONSE.

Une égalité	**Vraie ou Fausse ?**	**Justification**
$x + 9 = 9x$		
$3 \times (x+5) = 3x + 5$		
$x \times (x+1) = x^2 + 2x$		
$5 + 2x = 7x$		

Bilan de l'activité menée avec les élèves

Cette activité est d'un intérêt certain pour l'apprentissage des élèves en calcul littéral.

Elle permet de donner un premier statut aux égalités : soit une égalité est vraie pour toute valeur de x, soit elle n'est pas vraie pour toute valeur de x et dans ce cas on la qualifie d'égalité fausse. Il est important de clarifier ce statut car dans le travail mené sur les équations on sera amené à écrire des égalités « fausses » pour résoudre « $3 + 7x = 10x$ » par exemple.

Elle permet également d'outiller les élèves pour contrôler des résultats et d'éviter les erreurs fréquentes. Les séquences suivantes ont porté sur la réduction d'expressions littérales et le travail sur les égalités a permis de rendre plus autonomes les élèves sur la détection d'erreurs.

En particulier, pour expliquer aux élèves que l'expression littérale « $5 - 2x$ » ne se réduit pas en « $3x$ ». Quelques essais numériques suffisent pour contrôler qu'à l'exception de $x = 1$, l'égalité n'est vraie pour aucune autre valeur de x.

Evaluation et critères de réussite…

Quelques semaines après le travail mené en classe, un exercice similaire à celui qui a été travaillé en classe a été proposé en évaluation. Entre temps, quelques égalités à statuer ont été proposées en questions flash (rituel de début de séance pour les élèves du collège Roger Martin du Gard) pour entretenir le travail réalisé à l'issue de cette activité.

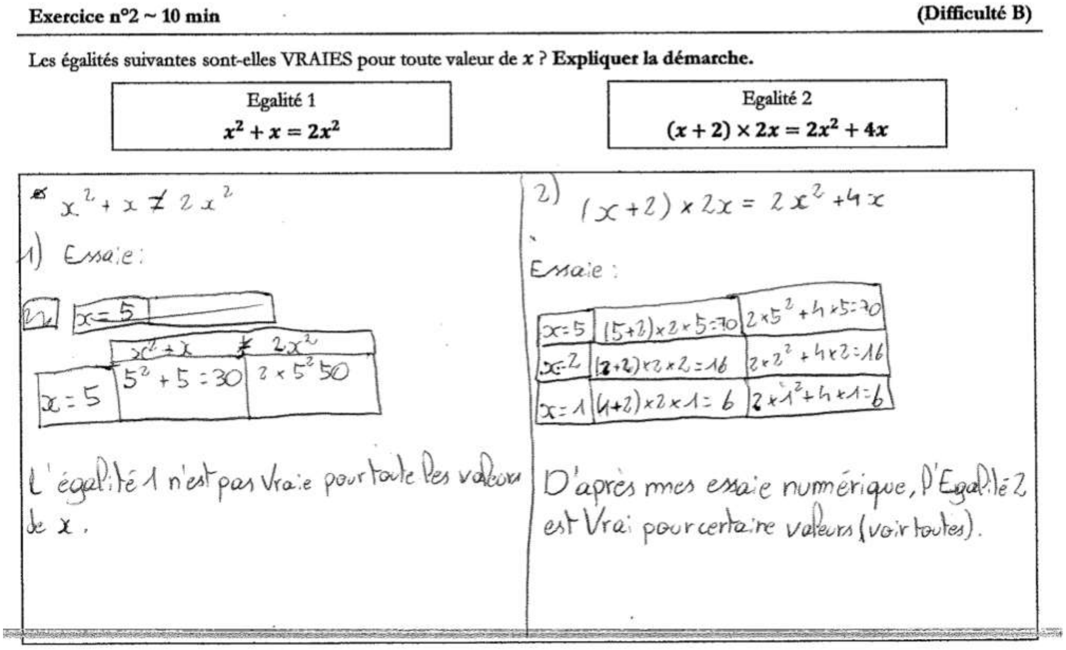
Les égalités suivantes sont-elles VRAIES pour toute valeur de x ? **Expliquer la démarche.**

Egalité 1	Egalité 2
$\boldsymbol{x^2 + x = 2x^2}$	$\boldsymbol{(x + 2) \times 2x = 2x^2 + 4x}$

Il est intéressant de catégoriser les différents niveaux de raisonnement des élèves pour résoudre ce type d'exercice en lien avec les indicateurs rencontrés dans l'évaluation des compétences de cycle. Cette hiérarchisation n'a pas valeur de modèle et pourra être adaptée par chaque enseignant qui souhaiterait se l'approprier.

Niveau Insuffisant – Fragile

L'élève est capable d'utiliser un contre-exemple pour prouver que l'égalité n°1 n'est pas vraie pour toute valeur de x. En revanche, pour prouver que l'égalité n°2 est vraie pour toute valeur de x, il n'est pas fait de distinction entre le fait que l'égalité soit vraie pour trois valeurs de x et pour toute valeur de x. Par ailleurs, l'élève ne fait pas référence à une propriété algébrique (distributivité). Si les calculs numériques sont justes, on pourrait néanmoins attendre d'un élève de 3ème qu'il détaille les étapes de calculs.



Exercice n°2 ~ 10 min **(Difficulté B)**

Les égalités suivantes sont-elles VRAIES pour toute valeur de x ? **Expliquer la démarche.**

Egalité 1	Egalité 2
$x^2 + x = 2x^2$	$(x+2) \times 2x = 2x^2 + 4x$

$x^2 + x \neq 2x^2$

1) Essaie :

$x = 5$

	$x^2 + x$ ≠	$2x^2$
$x = 5$	$5^2 + 5 = 30$	2×5^2 50

L'égalité 1 n'est pas Vraie pour toute les valeurs de x.

2) $(x+2) \times 2x = 2x^2 + 4x$

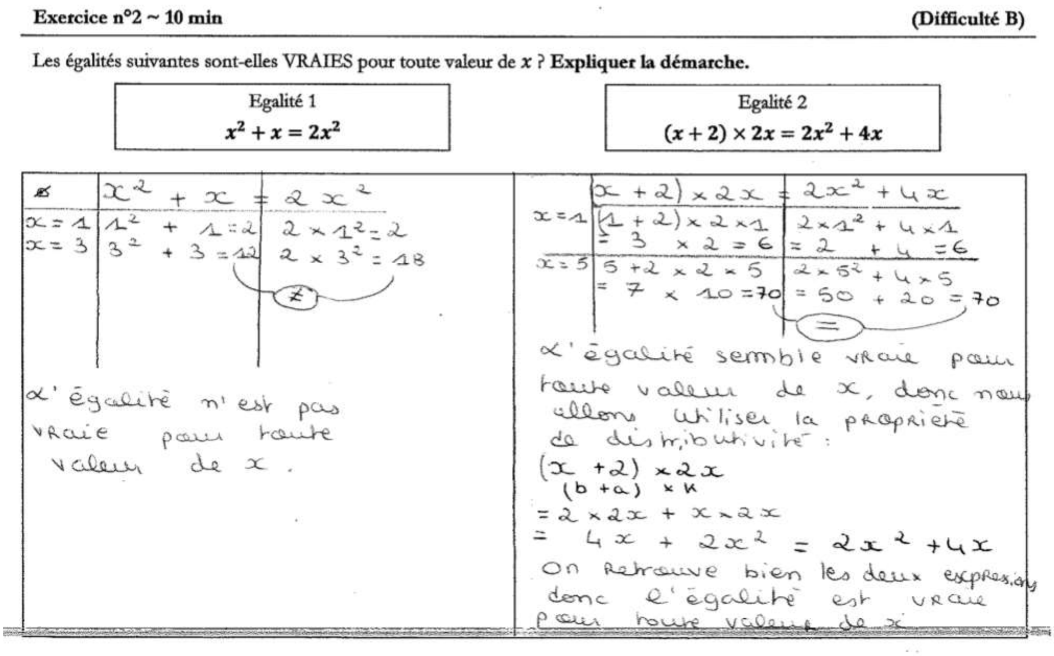
Essaie :

$x=5$	$(5+2)\times 2 \times 5 = 70$	$2\times 5^2 + 4 \times 5 = 70$
$x=2$	$(2+2)\times 2\times 2 = 16$	$2\times 2^2 + 4\times 2 = 16$
$x=1$	$(1+2)\times 2\times 1 = 6$	$2\times 1^2 + 4\times 1 = 6$

D'après mes essaie numérique, l'Egalité 2 est Vrai pour certaine valeurs (voir toutes).

Niveau Satisfaisant – Très satisfaisant

L'élève est capable d'utiliser un contre-exemple pour prouver que l'égalité n°1 n'est pas vraie pour toute valeur de x. Pour l'égalité n°2, l'élève fait appel à la démarche travaillée en classe : essais numériques, conjecture, preuve algébrique. Il y'a une référence explicite quant à la propriété de distributivité, comme on pourrait par exemple l'attendre dans un exercice de géométrie. A noter que l'utilisation de la propriété de distributivité se fait par le biais de l'identification des coefficients k, a et b de la propriété générale. Les calculs numériques sont justes et les étapes intermédiaires de calcul sont présentes, l'oubli de parenthèses pour l'essai numérique avec $x = 5$ semble être une erreur d'étourderie.



Exercice n°2 ~ 10 min **(Difficulté B)**

Les égalités suivantes sont-elles VRAIES pour toute valeur de x ? **Expliquer la démarche.**

Egalité 1	Egalité 2
$x^2 + x = 2x^2$	$(x+2) \times 2x = 2x^2 + 4x$

	$x^2 + x$	$= 2x^2$
$x = 1$	$1^2 + 1 = 2$	$2 \times 1^2 = 2$
$x = 3$	$3^2 + 3 = 12$	$2 \times 3^2 = 18$

≠

L'égalité n'est pas vraie pour toute valeur de x.

	$(x+2)\times 2x$	$= 2x^2 + 4x$
$x=1$	$(1+2)\times 2\times 1$ $= 3 \times 2 = 6$	$2\times 1^2 + 4\times 1$ $= 2 + 4 = 6$
$x=5$	$5+2\times 2\times 5$ $= 7 \times 10 = 70$	$2\times 5^2 + 4 \times 5$ $= 50 + 20 = 70$

=

L'égalité semble vraie pour toute valeur de x, donc nous allons utiliser la propriété de distributivité :

$(x+2)\times 2x$

$(b+a)\times k$

$= 2\times 2x + x \times 2x$

$= 4x + 2x^2 = 2x^2 + 4x$

On retrouve bien les deux expressions donc l'égalité est vraie pour toute valeur de x