CCF

BTS Systèmes numériques
2ème année

Exercice 1 :

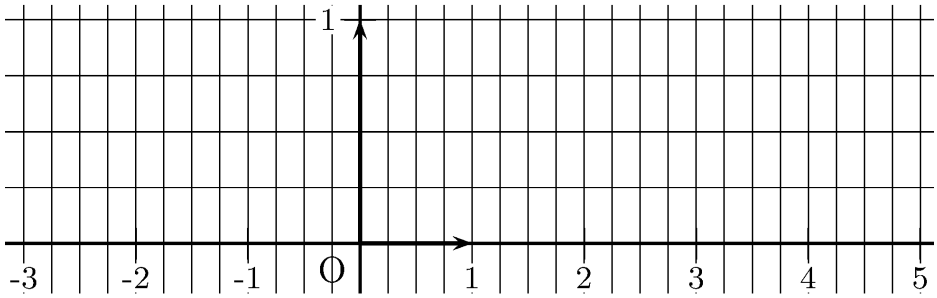
On considère le signal s, périodique de période 2 défini par :

$$s(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ si } t \geq 2 \end{cases}.$$

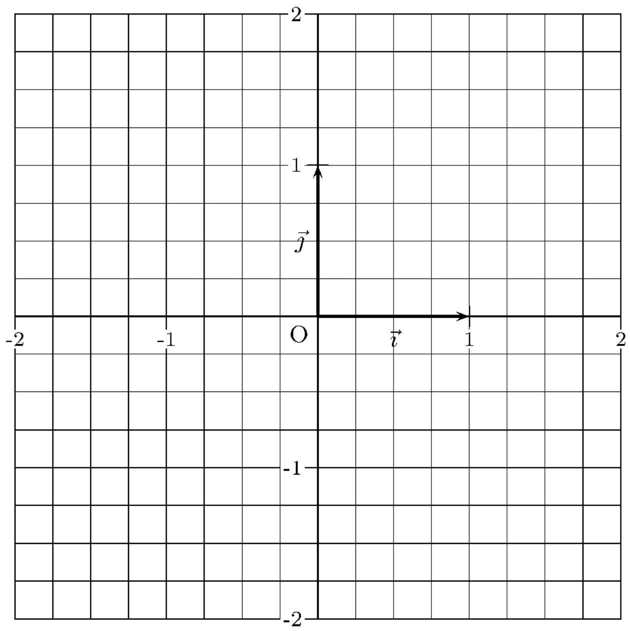
On souhaite étudier le spectre de s à l'aide d'un échantillonnage et de la transformée de Fourier discrète.

Partie A : Étude du signal et discrétisation

1. Tracer la représentation graphique de la fonction s, pour x variant dans l'intervalle $[-3; 5[$, dans le repère ci-dessous.



2. Considérons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{4}}$.
   a. Simplifier ω.
   b. Placer dans le plan complexe les points A, B, C, et D d'affixes respectives 1, ω, ω^2 et ω^3.



3. On effectue N=4 mesures à intervalles réguliers du signal s à partir de l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant $t = 2$.
   a. Donner la période d'échantillonnage puis la fréquence d'échantillonnage.
   b. Donner les instants t_0, t_1, t_2, t_3 auxquels on effectue un échantillon.
   c. Donner les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, les valeurs correspondantes du signal, c'est-à-dire que pour tout i, de 0 à 3, on a $x_i = s(t_i)$.

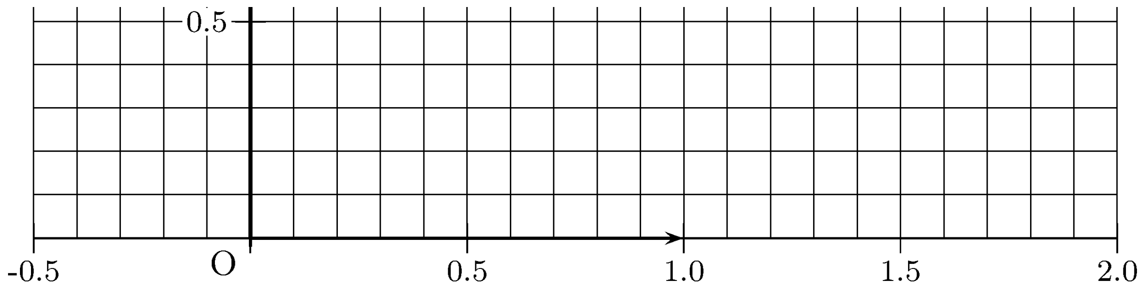
Partie B : Transformée de Fourier discrète

Pour obtenir une approximation du spectre, on utilise la transformée de Fourier discrète. Pour tout ℓ, de 0 à 3, on note :

$$y_\ell = \sum_{k=0}^{3} x_k \omega^{-k\ell}.$$

1. On souhaite calculer les valeurs y_0, y_1, y_2, y_3.
   a. Écrire l'égalité définissant y_0, y_1, y_2, y_3 sous forme matricielle.
   b. En déduire les valeurs de y_0, y_1, y_2, y_3.
2. Compléter le tableau ci-dessous et représenter dans le repère ci-dessous le spectre donné par les valeurs : $\frac{|y_0|}{N}$, $\frac{|y_1|}{N}$, $\frac{|y_2|}{N}$, $\frac{|y_2|}{N}$.

$\frac{|y_0|}{N}$	$\frac{|y_1|}{N}$	$\frac{|y_2|}{N}$	$\frac{|y_2|}{N}$



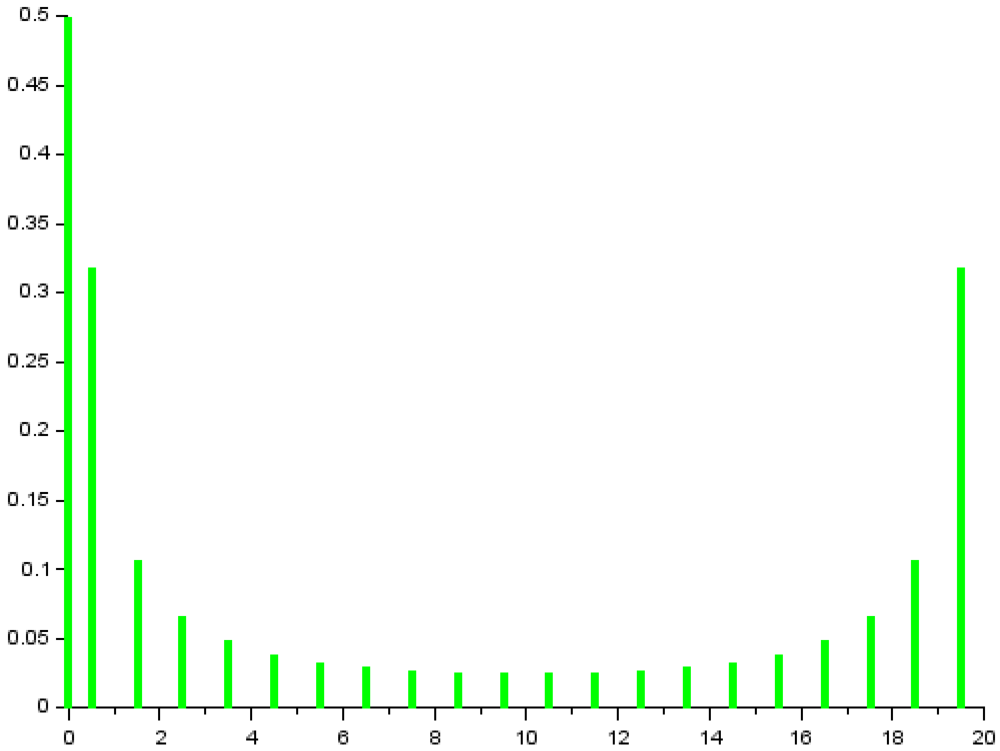
3. La précision précédente est insuffisante. Pour cela, on augmente le nombre d'échantillons. On prend 40 mesures du signal. Un logiciel de calcul numérique nous permet d'obtenir les valeurs y_0, y_1, ..., y_{39} :

```
T=...
Ne=...
Te=T/Ne;
Fe=1/Te;

t=[0:1:Ne-1]*Te;
x=s(t'); // On échantillonne le signal s
y=abs(fft(x))/Ne;
fr=(0:1:Ne-1)*Fe/Ne;
plot2d3(fr(1:Ne),y(1:Ne))
```

   a. Dans le programme ci-dessous, quelles valeurs faut-il affecter à T et Ne ?

b. Le programme nous permet d'obtenir le graphique ci-dessous :



Donner une approximation de l'amplitude des quatre premières fréquences.

c. Comparer avec les valeurs obtenues à la question 2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 :

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté par une tension $e(t)$. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Figure

L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$RCu'(t) + u(t) = e(t) \qquad (E)$$

où la fonction inconnue u, de la variable t, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et u' est la fonction dérivée de u.

On se place dans le cas où $R = 2\Omega$ et $C = \frac{1}{2}$ F.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

1. On suppose que $e(t) = 1$. Écrire l'équation différentielle (E) en utilisant les données précédentes.
2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $u' + u = 0$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$. Démontrer que g est une solution de (E).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la solution f de l'équation différentielle solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 2$.

Partie B : Étude de la solution

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par u$(x) = 1 + e^{-t}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} u(t)$.
2. Déterminer la fonction dérivée u' de la fonction u et en déduire le tableau de variations de la fonction u.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à 10^{-3} près l'instant t_0 tel que $u(t_0) = 1{,}05$, c'est-à-dire l'instant à partir duquel la tension aux bornes du condensateur vaut sa valeur finale à 5% près.

Annexe : grille d’évaluation des situations de CCF

<table>
<tr><td colspan="4">GRILLE NATIONALE D’ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES
BTS SN – Sous-épreuve E3</td></tr>
<tr><td colspan="2">NOM :</td><td colspan="2">Prénom :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situation d’évaluation n°</td><td colspan="2">Date de l’évaluation :</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Liste des contenus et capacités du programme évalués</td></tr>
<tr><td>Contenus</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Capacités</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Évaluation[1]</td></tr>
<tr><td>Compétences</td><td>Capacités</td><td>Questions de l’énoncé</td><td>Appréciation du niveau d’acquisition[2]</td></tr>
<tr><td>S’informer</td><td>Rechercher, extraire et organiser l’information.</td><td>Ex1 : A3a
B3a, B3b
Ex 2 : A1, A4</td><td></td></tr>
<tr><td>Chercher</td><td>Proposer une méthode de résolution.
Expérimenter, tester, conjecturer.</td><td>Ex 2 : A2</td><td></td></tr>
<tr><td>Modéliser</td><td>Représenter une situation ou des objets du monde réel.
Traduire un problème en langage mathématique.</td><td>Ex 1 : A1, A2b
Ex 2 : A5</td><td></td></tr>
<tr><td>Raisonner, argumenter</td><td>Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat.</td><td>Ex 1 : A2a, B3c
Ex 2 : B2, B3</td><td></td></tr>
<tr><td>Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie</td><td>Calculer, illustrer à la main ou à l’aide d’outils numériques, programmer.</td><td>Ex 1 A3b, A3c, B1, B2
Ex 2 : A3, B1</td><td></td></tr>
<tr><td>Communiquer</td><td>Rendre compte d’une démarche, d’un résultat, à l’oral ou à l’écrit.
Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique.</td><td>Ex 1 : B1a
Ex 2 : B1, B3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>TOTAL</td><td>/ 10</td></tr>
</table>

[1] Des appels (2 au maximum) permettent de s’assurer de la compréhension du problème et d’évaluer la communication orale et les capacités liées à l’usage des outils numériques.
Sur les 10 points, 3 points sont consacrés à l’évaluation de l’utilisation des outils numériques dans le cadre de différentes compétences.

[2] Le professeur peut utiliser toute forme d’annotation lui permettant d’évaluer par compétences.