NOM :

Prénom :

Épreuve E3

Mathématiques

CCF 2

Épreuve écrite d'une durée de 55 minutes.

Tous les documents sont interdits.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'usage d'un tableur et d'un logiciel de calcul formel est autorisé.

ATTENTION

Certaines questions nécessitent de faire appel au professeur pour lui montrer un affichage à l'écran de la calculatrice ou de l'ordinateur ou pour lui expliquer votre démarche.

Les deux parties de ce problème peuvent se traiter indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Dans cette première partie, on étudie le traitement d'un signal discret causal entre son entrée dans un système (le signal d'entrée est noté $x(n)$) et sa sortie du système (le signal de sortie est noté $y(n)$). On admet que les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont liés par l'équation récurrente suivante, notée (R) :

$$\text{(R) :} \quad 4\,y(n) - 3\,y(n-1) = x(n) \ \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On note $(Zx)(z)$ et $(Zy)(z)$ les transformées en Z respectives de $x(n)$ et $y(n)$.

1. Après avoir transformé chacun des termes de l'équation récurrente (R), montrer que :

$$(Zy)(z) = \frac{z}{4z-3} \times (Zx)(z)$$

Les questions **2.**, **3.** *et* **4.** *sont indépendantes les unes des autres.*

2. On suppose dans cette question que le signal d'entrée est un échelon unité : $x(n) = e(n)$ avec $e(n) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

a. Représenter graphiquement le signal d'entrée $x(n)$ sur la **Figure 1**.

b. Donner une expression de $(Zx)(z)$ et en déduire une expression de $(Zy)(z)$.

c. Montrer que :

$$(Zy)(z) = \frac{z}{z-1} - 0{,}75 \times \frac{z}{z-0{,}75}$$

d. Déduire de la question précédente une expression de $y(n)$ en fonction de n.

e. Compléter le **Tableau 1** en arrondissant si nécessaire les valeurs au millième.

f. Représenter graphiquement le signal de sortie $y(n)$ sur la **Figure 2**.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0							
$y(n)$	0							

Tableau 1

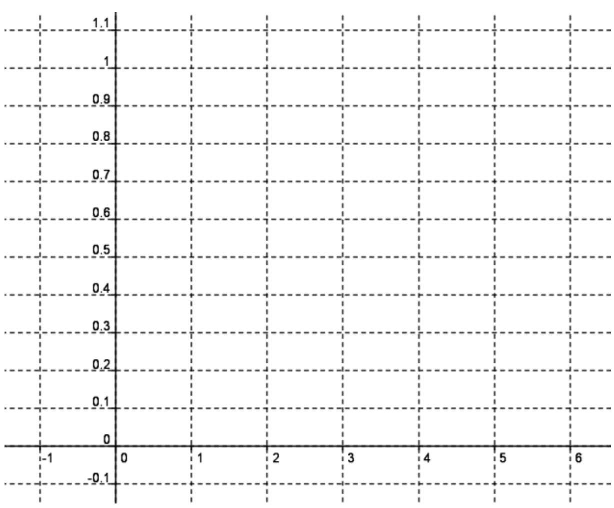


Figure 1

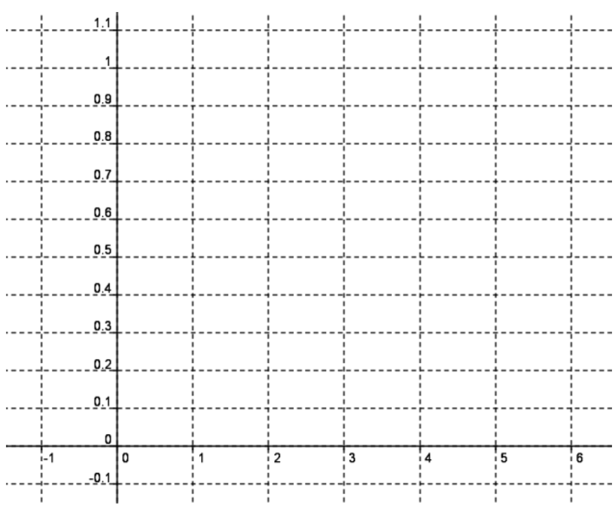


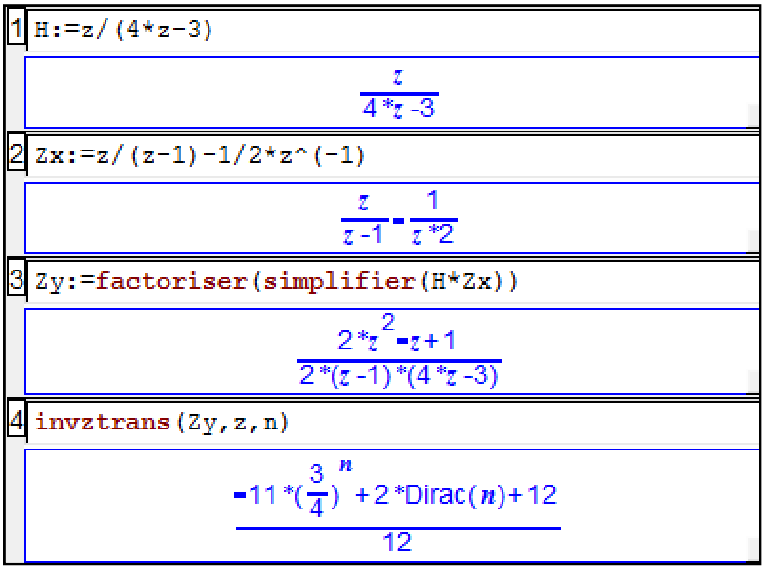
Figure 2

3. On suppose que le signal d'entrée subit une perturbation et qu'il est représenté sur la **Figure 3** ci-dessous.

a. Donner une expression du nouveau signal d'entrée $x(n)$ en fonction des signaux usuels, puis vérifier que :

$$(Zx)(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}z^{-1}$$

On donne ci-dessous une capture d'écran obtenue via le logiciel de calcul formel Xcas :



La commande **invztrans**(Zy,z,n) permet de déterminer une expression du signal de sortie $y(n)$ à partir de sa transformée $(Zy)(z)$.

Remarque : Pour Xcas, Dirac(*n*) correspond à l'impulsion de Dirac que nous notons habituellement $d(n)$.

b. En vous aidant de la capture d'écran ci-dessus, donner une expression de $y(n)$ en fonction de n puis compléter le **Tableau 2** en arrondissant les valeurs au millième.

c. Représenter graphiquement le signal de sortie $y(n)$ sur la **Figure 4**.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	1	0,5	1	1	1	1	1
$y(n)$	0							

Tableau 2

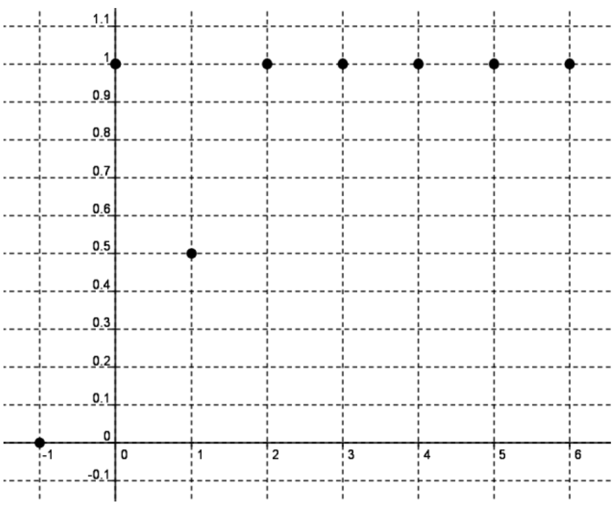


Figure 3

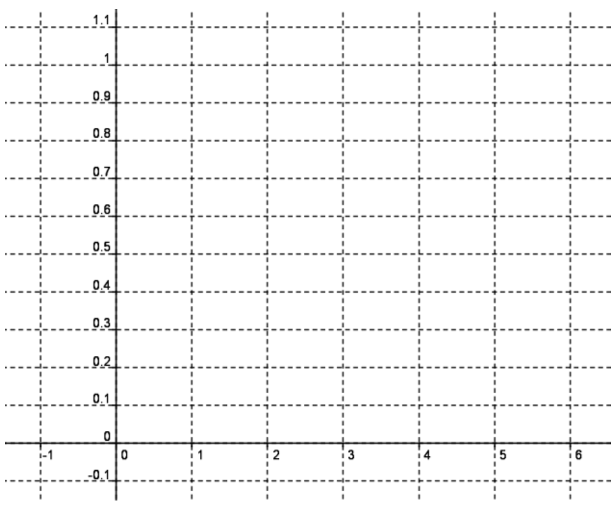


Figure 4

4. On suppose dans cette question que le signal d'entrée a subi davantage de perturbations. La capture d'écran ci-dessous présente un extrait d'une feuille de calcul contenant les premiers termes du signal d'entrée $x(n)$.

C3 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	x(n)	0	1	0,5	1	1	1	1	0,7	1	1
3	y(n)	0									

a. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 (et recopier vers la droite) pour calculer les termes successifs du signal de sortie $y(n)$?

b. À l'aide du tableur, représenter sur un même graphique les signaux $x(n)$ et $y(n)$.

<u>Appeler le professeur pour lui montrer l'affichage obtenu à l'écran de l'ordinateur.</u>

Partie B

Dans cette partie, on étudie le nombre de perturbations subies par les mille premiers termes du signal $x(n)$. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de perturbations parmi les mille premiers termes de $x(n)$ et on admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 12$.

1. Donner l'espérance mathématique de X et interpréter sa valeur par une phrase.

2. Déterminer la probabilité que le signal présente exactement 10 perturbations parmi ses mille premiers termes.

3. Déterminer la probabilité que le signal présente au moins 15 perturbations parmi ses mille premiers termes.

4. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(X \leq n) \geq 0{,}999$ et interpréter par une phrase le résultat obtenu.

<u>Appeler le professeur pour lui expliquer votre démarche.</u>

Grille nationale d’évaluation en mathématiques
BTS SN EC – Épreuve E3

NOM :	Prénom :
Situation d’évaluation n°2	Date de l’évaluation :

1. Liste des contenus et capacités du programme évalués

Contenus	Transformation en Z (transformée en Z d’un signal causal, transformée en Z des signaux causaux usuels, équations récurrentes), Loi de Poisson
Capacités	Déterminer la transformée en Z d’un signal causal à partir des signaux causaux usuels, déterminer le signal causal (original) dont la transformée en Z est donnée. Calculer une probabilité dans le cadre de la loi de Poisson à l’aide de la calculatrice ou d’un logiciel, interpréter l’espérance dans le cadre d’un grand nombre de répétitions.

2. Évaluation

Compétences	Capacités	Questions de l’énoncé	Appréciation du niveau d’acquisition
S’informer	Rechercher, extraire et organiser l’information.	A3b – B1	
Chercher	Proposer une méthode de résolution. Expérimenter, tester, conjecturer.	A1 – A4a – B4	
Modéliser	Représenter une situation ou des objets du monde réel. Traduire un problème en langage mathématique.	A3a – B1 – B2	
Raisonner, argumenter	Déduire, induire, justifier ou démontrer un résultat. Critiquer une démarche, un résultat.	A1 – A2d	
Calculer, illustrer, mettre en œuvre une stratégie	Calculer, illustrer à la main ou à l’aide d’outils numériques, programmer.	A2b – A2e – A4b B2 – B3 – B4	
Communiquer	Rendre compte d’une démarche, d’un résultat, à l’oral ou à l’écrit. Présenter un tableau, une figure, une représentation graphique.	A2a – A2f – A3c B1 – B4	

Note	**/10**

Corrigé

Partie A

1. La transformée en Z du terme $4y(n)$ est $4(Zy)(z)$, celle du terme $-3y(n-1)$ est $-3z^{-1}(Zy)(z)$ et celle du terme $x(n)$ est $(Zx)(z)$.
   En transformant l'équation récurrente (R), on obtient $4(Zy)(z) - 3z^{-1}(Zy)(z) = (Zx)(z)$, d'où $(4-3z^2) \times (Zy)(z) = (Zx)(z)$ et donc $(Zy)(z) = \frac{1}{4-z^{-1}} \times (Zx)(z) = \frac{z}{4z-3} \times (Zx)(z)$.

2.
   - **a.** Voir figure 1.
   - **b.** La transformée en Z de l'échelon $e(n)$ est $(Zx)(z) = \frac{z}{z-1}$
     On en déduit que $(Zy)(z) = \frac{z}{4z-3} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(4z-3)(z-1)}$
   - **c.** $\frac{z}{z-1} - 0{,}75 \times \frac{z}{z-0{,}75} = \frac{z}{z-1} - \frac{3z}{4z-3} = \frac{z(4z-3)-3z(z-1)}{(z-1)(4z-3)} = \frac{4z^2-3z-3z^2+3z}{(z-1)(4z-3)} = \frac{z^2}{(z-1)(4z-3)} = (Zy)(z)$
   - **d.** $\frac{z}{z-1}$ est la transformée en Z du signal $e(n)$ et $\frac{z}{z-0{,}75}$ est la transformée en Z du signal $0{,}75^n e(n)$. On déduit de la question précédente que $y(n) = e(n) - 0{,}75 \times 0{,}75^n e(n) = (1 - 0{,}75^{n+1})e(n)$.
     Ainsi, $y(n) = 0$ pour tout $n < 0$ et $y(n) = 1 - 0{,}75^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
   - **e.** Voir tableau 1.
   - **f.** Voir figure 2.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	1	1	1	1	1	1	1
$y(n)$	0	0,25	0,437	0,578	0,684	0,763	0,822	0,867

Tableau 1

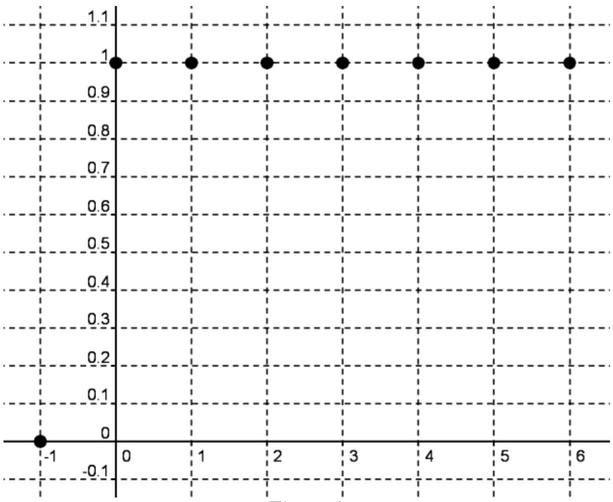


Figure 1

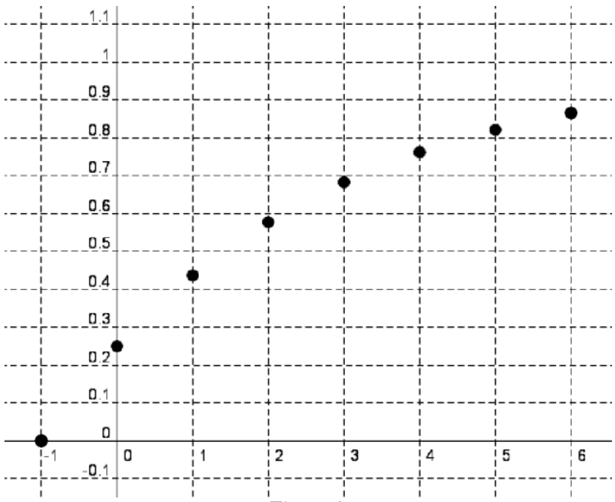


Figure 2

3.
   - **a.** Une expression du nouveau signal d'entrée $x(n)$ est $e(n) - 0{,}5 \times d(n-1)$.
   - **b.** La quatrième ligne du document Xcas donne une expression de $y(n)$, à savoir $y(n) = \frac{-11\times0{,}75^n+2\times d(n)+12}{12}$
     ce qu'on peut encore écrire $y(n) = -\frac{11}{12} \times 0{,}75^n + \frac{1}{6} \times d(n) + 1$.
     Voir tableau 2.
   - **c.** Voir figure 3.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	0	1	0,5	1	1	1	1	1
$y(n)$	0	0,25	0,312	0,484	0,613	0,710	0,782	0,837

Tableau 2

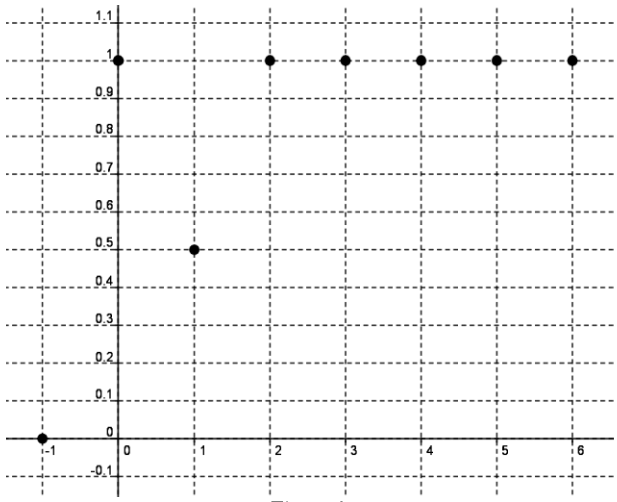


Figure 3

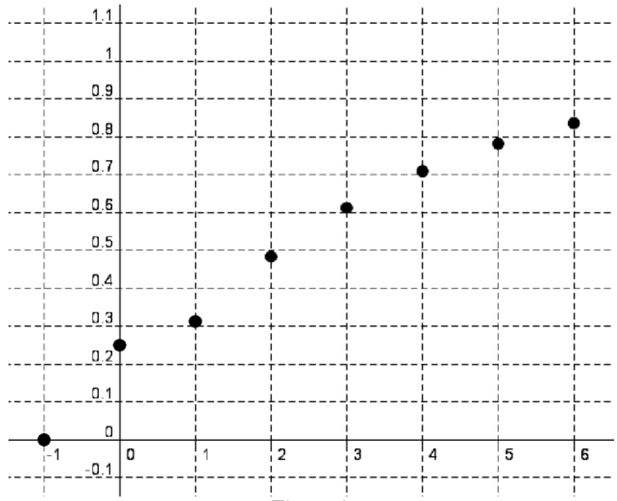


Figure 4

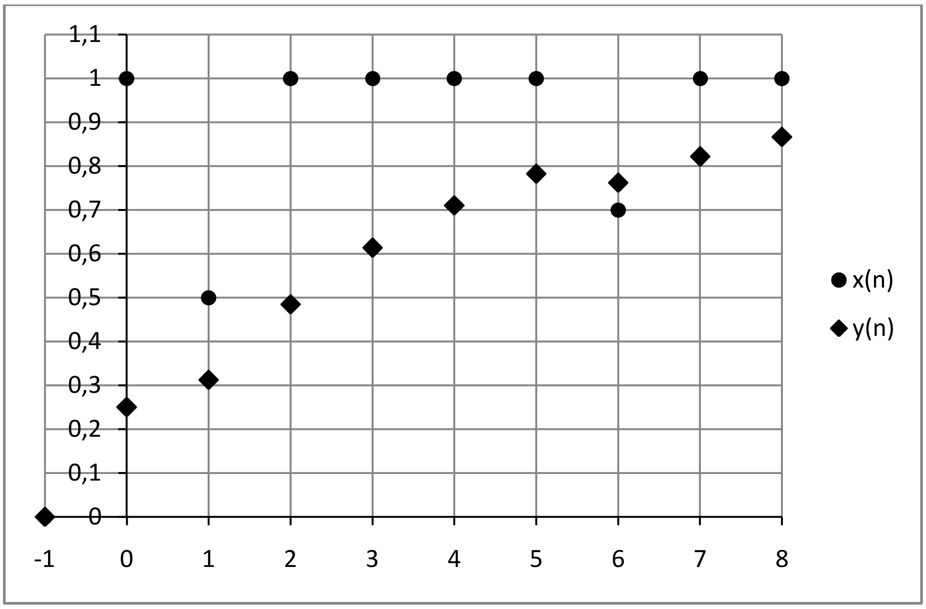
4.

a. L'équation récurrente (R) se réécrit $4y(n) = x(n) + 3y(n-1)$ ou encore $y(n) = \frac{1}{4}\left(x(n) + 3y(n-1)\right)$. On entre donc dans la cellule C3 la formule « `=(C2+3*B3)/4` » et on la recopie vers la droite.

C3 | f_x =(C2+3*B3)/4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	x(n)	0	1	0,5	1	1	1	1	0,7	1	1
3	y(n)	0	0,25	0,3125	0,484375	0,61328125	0,70996094	0,7824707	0,76185303	0,82138977	0,86604233

b.



Partie B

1. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ est $E(X) = \lambda$. On a donc ici $E(X) = 12$. Cela signifie que, si on considère les mille premiers termes d'un grand nombre de signaux, chaque signal présente en moyenne douze perturbations.
2. On trouve $p(X = 10) \approx 0{,}105$ à l'aide de la commande `PoissonFRép(12,10)` de la calculatrice.
3. En remarquant que $p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14)$, on trouve $p(X \geq 15) \approx 0{,}228$ à l'aide de la commande `1-PoissonFRép(12,14)` de la calculatrice.
4. En entrant dans la calculatrice la fonction `PoissonFRép(12,X)` et en affichant sa table de valeurs pour les valeurs entières de `X`, on trouve $p(X \leq 23) \approx 0{,}9985$ et $p(X \leq 24) \approx 0{,}9993$. L'entier n cherché est donc $n = 24$. Cela signifie que les mille premiers termes du signal présentent moins de 24 perturbations avec une certitude de 99,9%.