MODÈLE DE DIFFUSION D’EHRENFEST

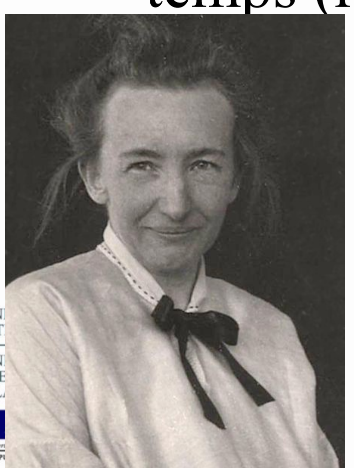
académie Créteil
MINISTÈRE DE L’ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE DE L’ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Un peu d'histoire…

Ce modèle doit son nom au couple de physiciens Tatiana et Paul Ehrenfest et à leurs travaux réalisés au début du XXème siècle.

Il fut proposé en 1907 afin de décrire en terme de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente.

L'étude de ce modèle nous permettra de voir que l'on peut naturellement s'attendre à atteindre un état d'équilibre alors que le comportement du modèle est réversible dans le temps (recherche du temps de retour à l'état initial).

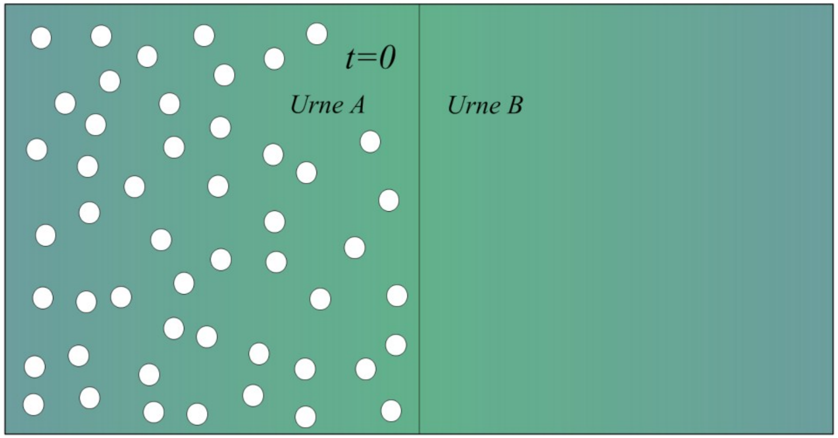


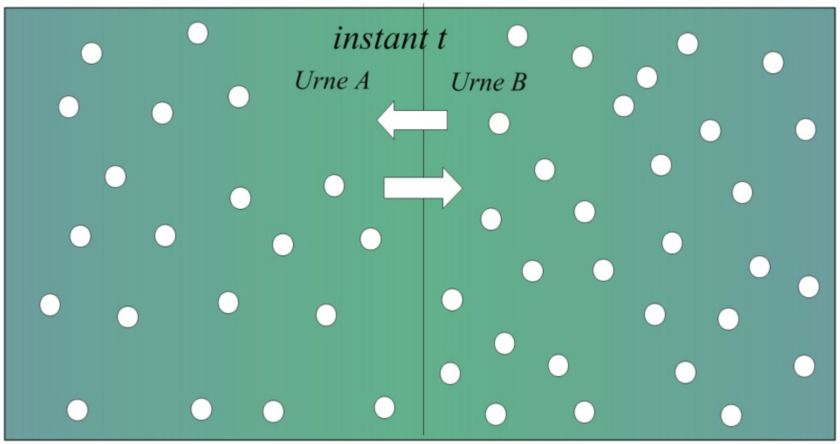
Modélisation

On considère une enceinte séparée par une paroi en deux urnes A et B et contenant au total N boules numérotées de 1 à N. A l'instant initial, toutes les boules sont dans l'urne A.

A chaque instant, on choisit au hasard et de façon équiprobable un nombre compris entre 1 et N.

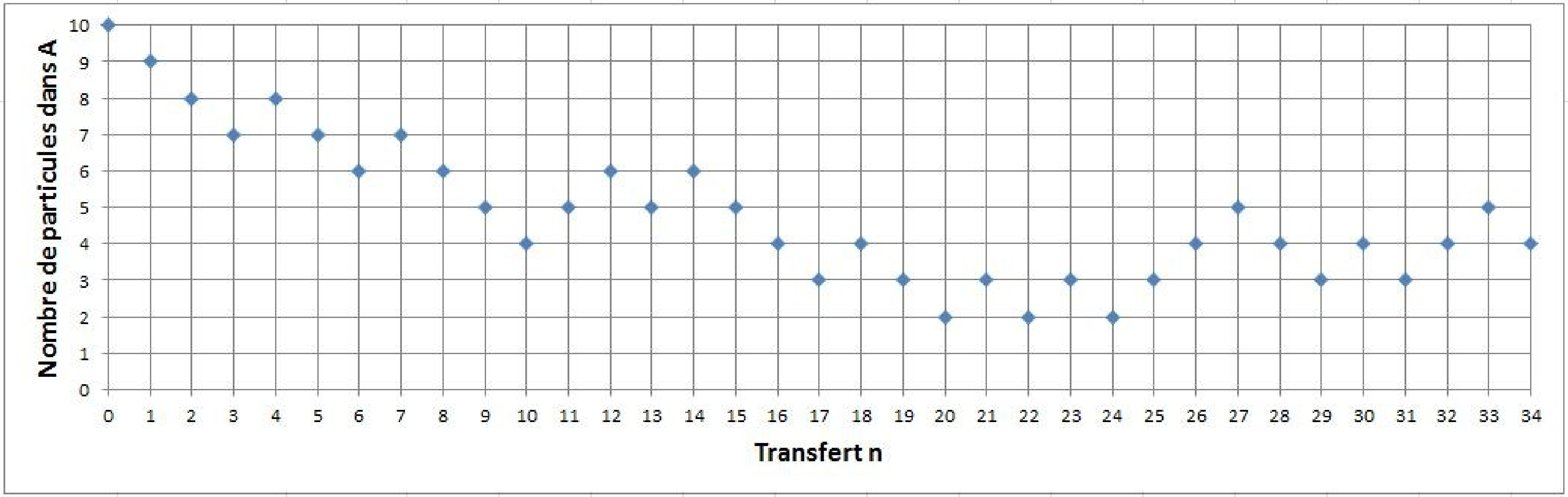
Ainsi, à chaque instant, une boule choisie au hasard change d'urne.





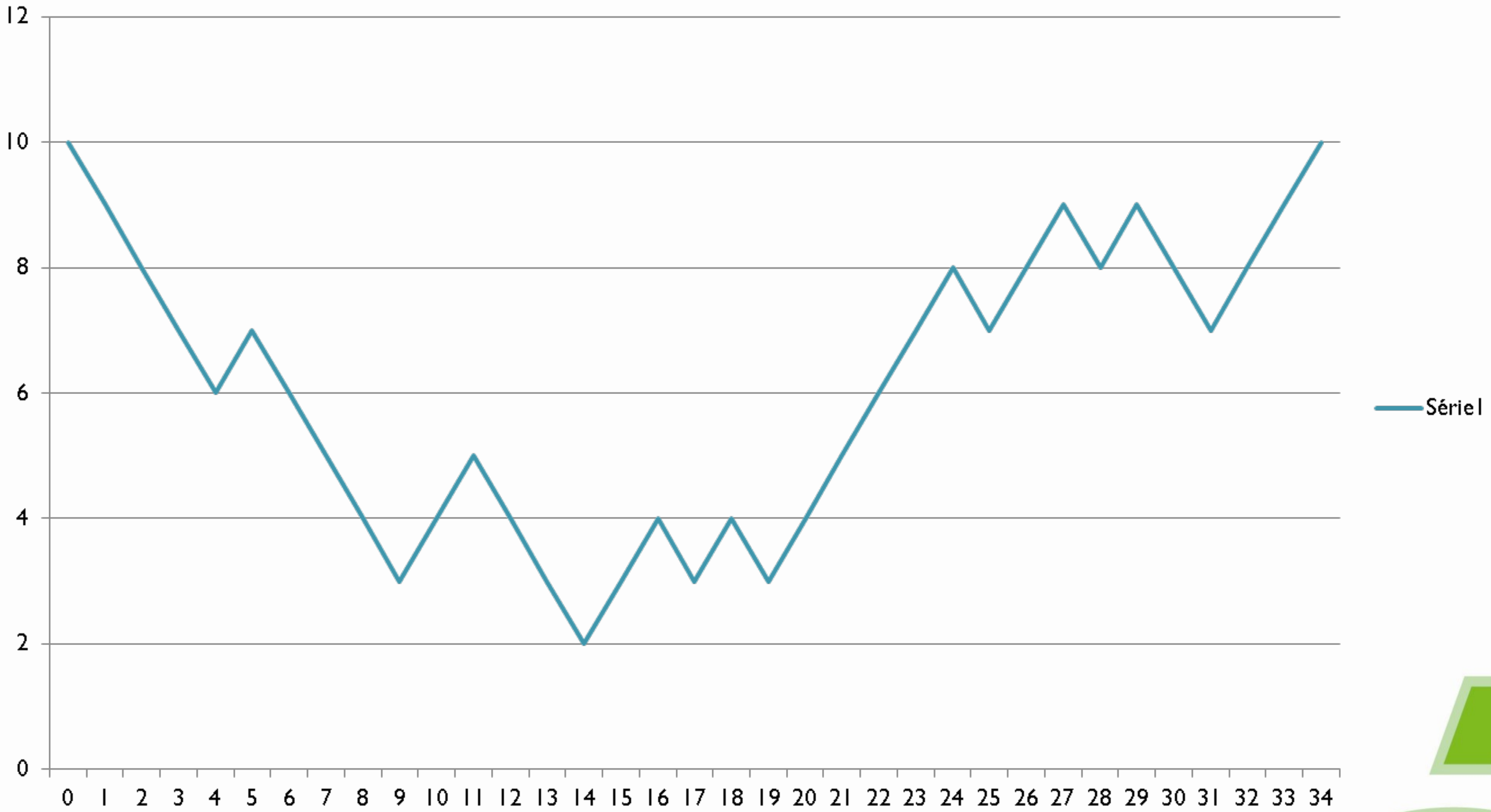
académie Créteil

Simulation dans le cas où N=10



		Position de chaque particule (code 1 pour A, 0 pour B). Particule numéro :										Effectif	
Transfert n	Particule transférée	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A	B
0		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1
2	6	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	8	2
3	4	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	7	3

Un autre résultat pour N = 10



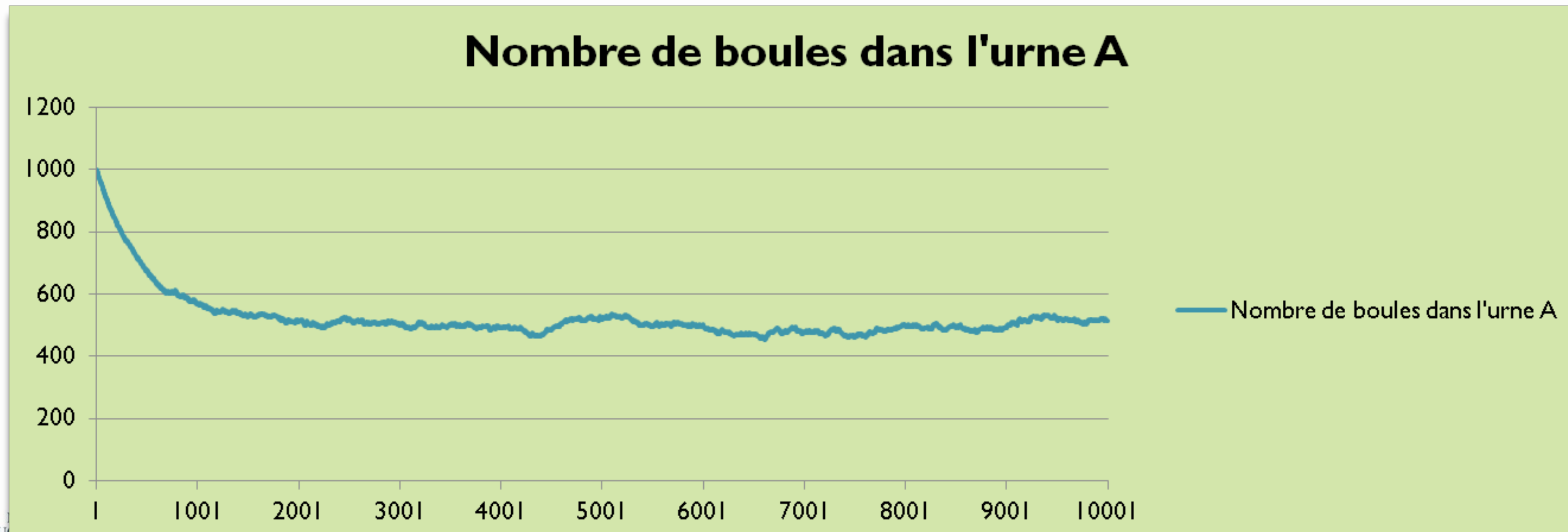
On observe donc ici un retour à l'état initial…

Simulation pour une valeur de N plus grande

Simulation sur tableur avec N=1000 : on observe dans ce cas la stabilisation de la répartition des boules entre les deux urnes.

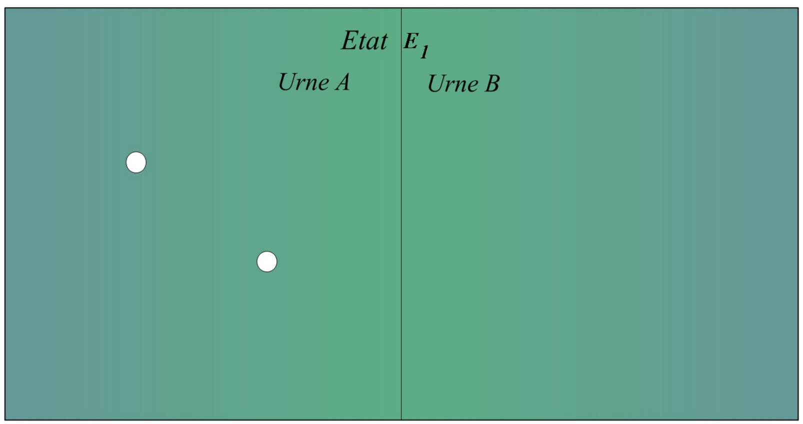
simulation N quelconque.xls

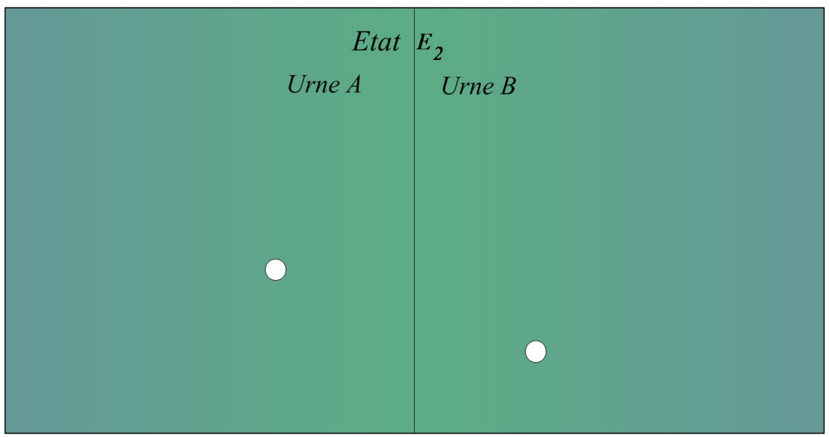
Illustration dans le cas de 10 000 tirages



Modélisation dans le cas N=2

Les urnes peuvent se trouver dans les trois états suivants :





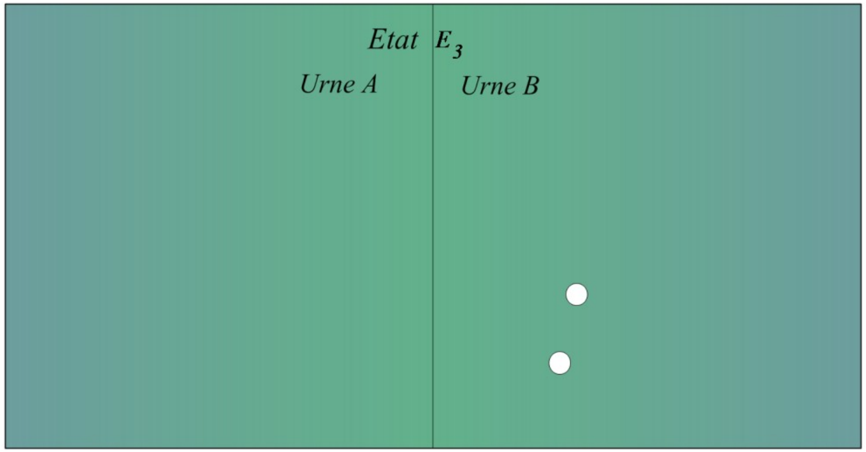
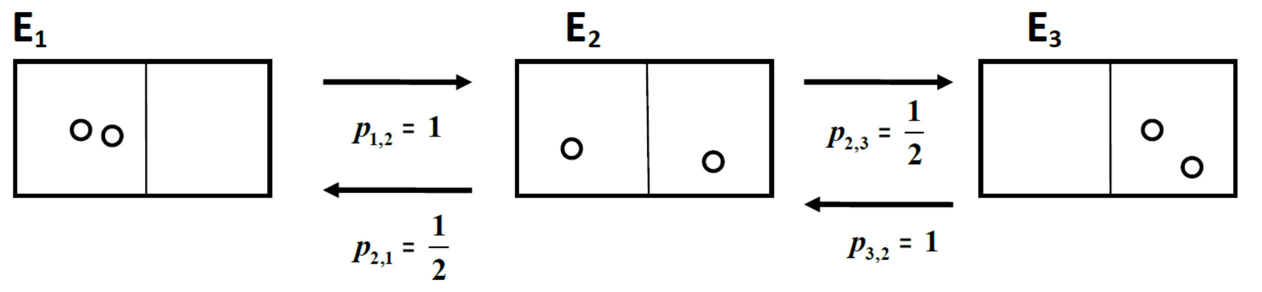


Illustration à l’aide d’un graphe

On note $p_{i,j}$ la probabilité de passer de l’état i à l’état j.



De plus, $p_{1,1} = p_{2,2} = p_{3,3} = p_{1,3} = p_{3,1} = 0$

On peut illustrer l’évolution dans le temps de la répartition des boules dans les urnes A et B par un graphe dont les sommets sont les états E_1, E_2, E_3.

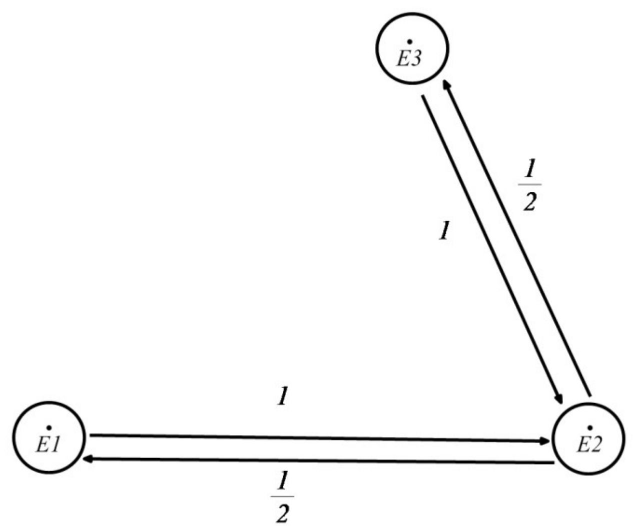


Illustration à l’aide d’une matrice

Les nombres $p_{i,j}$ peuvent être présentés dans une matrice carrée T de dimension 3.

$$T = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul des probabilités

- Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules présentes dans l'urne B à l'instant n. La loi de probabilité de X_n est donnée par le vecteur ligne M_n où le terme a_{1i} de M_n est la probabilité d'être dans l'état E_i à l'instant n.

D'après la formule des probabilités totales,

$$p(X_{n+1}=0)=p\big((X_{n+1}=0)\cap(X_n=0)\big)+p\big((X_{n+1}=0)\cap(X_n=1)\big)+p\big((X_{n+1}=0)\cap(X_n=2)\big)$$

$$=p_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)\times p(X_n=0)+p_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)\times p(X_n=1)+p_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)\times p(X_n=2)$$

$$=0+\frac{1}{2}\times p(X_n=1)+0$$

$$=\frac{1}{2}p(X_n=1)$$

De même, $p(X_{n+1}=1)=p(X_n=0)+p(X_n=2)$

et $p(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}p(X_n=1)$

Si on note $M_n=\begin{pmatrix} p(X_n=0) & p(X_n=1) & p(X_n=2)\end{pmatrix}$

alors $\forall n\in\mathbb{N}, M_{n+1}=M_n\times T$

où T est la matrice déjà évoquée : $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

avec

$M_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ puisque toutes les boules sont dans l'urne A à l'instant t=0.

Calcul de M_n

- Comme nous l'avons vu lors du premier exemple, on peut démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \geq 1,\ M_n = M_0 \times T^n$$

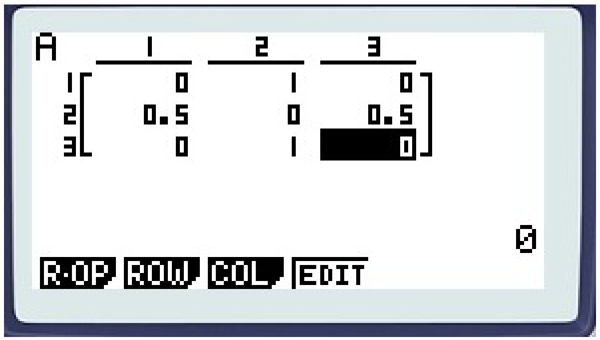
- Activité possible pour le calcul de T^n puis de M_n :

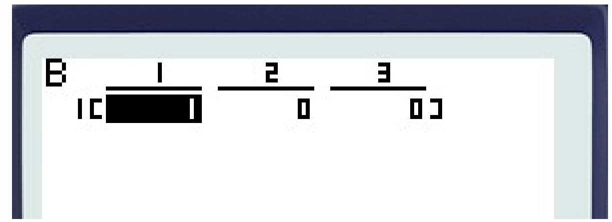
1. Montrer par récurrence que si n est pair, alors $T^n = T^2$ et si n est impair, alors $T^n = T$.

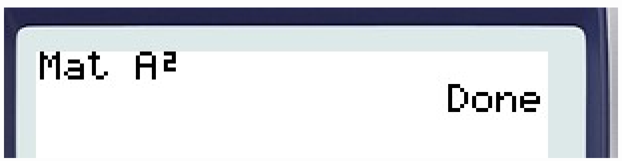
2. En déduire alors M_n en distinguant les deux cas.

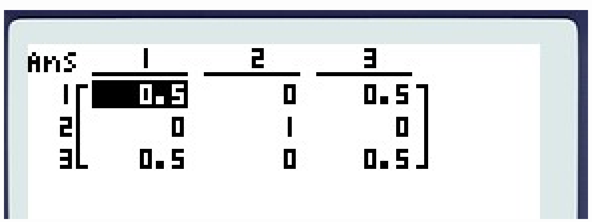
On montre ainsi qu'à tout instant impair, les urnes sont dans l'état E2 et qu'à tout instant pair, les urnes sont dans l'état E1 ou E3.

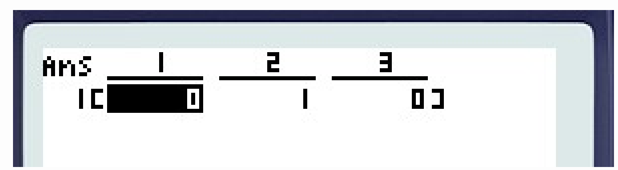
Utilisation de la calculatrice











Utilisation de XCas

? Sauve   Config : exact real RAD 12 xcas

1 T:=[[0,1,0],[1/2,0,1/2],[0,1,0]]

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$$

2 T^2 , T^3 , T^4 , T^5

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \right)$$

M_0:=[1,0,0]

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

M_1:=M_0*T

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$$

M_2:=M_0*T^2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Un algorithme…

Algorithme de recherche de temps de retour à l'état initial, utilisable pour de « petites » valeurs de l'entier n.

Sur Xcas ou sur Algobox :

```
saisir(nb_boules);
nb_boules_A:=nb_boules;
compteur :=0;
repeter
  compteur := compteur +1;
  boule_choisie := alea(nb_boules)+1
  si boule_choisie <= nb_boules_A alors
    nb_boules_A := nb_boules_A-1;
  sinon
    nb_boules_A := nb_boules_A+1;
  fsi
jusqua nb_boules_A == nb_boules;
afficher(compteur):;
```

```
VARIABLES
  nb_boules EST_DU_TYPE NOMBRE
  nb_boules_A EST_DU_TYPE NOMBRE
  Compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  H EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE nb_boules
  //nb_boules  est le nombre de boules placées dans l'urne A
  //nb_boules_A donne l'évolution du nombre de boules dans l'urne A
  nb_boules_A PREND_LA_VALEUR nb_boules-1
  //la 1ère boule est nécessairement choisie dans l'urne A
  Compteur PREND_LA_VALEUR 1
  //Un 1er tirage a déjà eu lieu
  TANT_QUE (nb_boules_A!=nb_boules) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    H PREND_LA_VALEUR floor(random()*(nb_boules)+1)
    SI (H<=nb_boules_A) ALORS
      DEBUT_SI
      nb_boules_A PREND_LA_VALEUR nb_boules_A-1
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        nb_boules_A PREND_LA_VALEUR nb_boules_A+1
        FIN_SINON
    Compteur PREND_LA_VALEUR Compteur+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER Compteur
FIN_ALGORITHME
```

académie Créteil

Compléments…

www.ac-creteil.fr

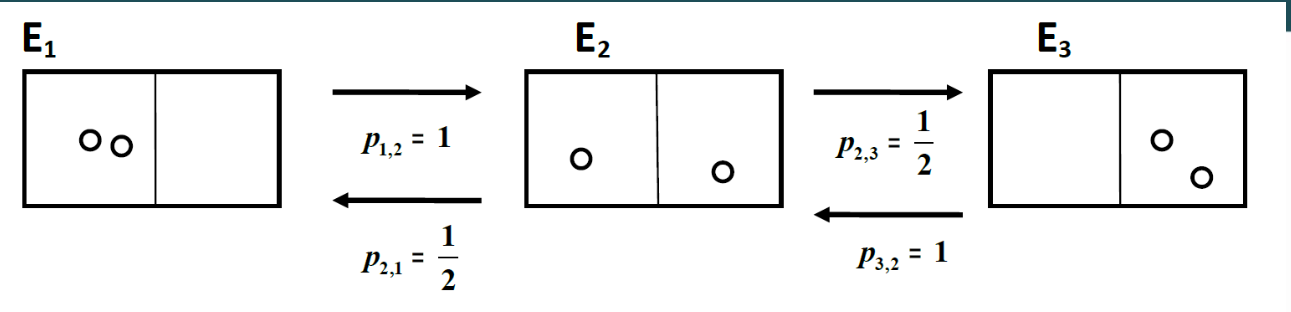
Espérance du temps de retour

Remarques à la frontière du programme de Terminale et figurant dans le Document Ressource: pour un nombre N de particules très grand, on conçoit aisément que le retour à l'état initial sera extrêmement rare.

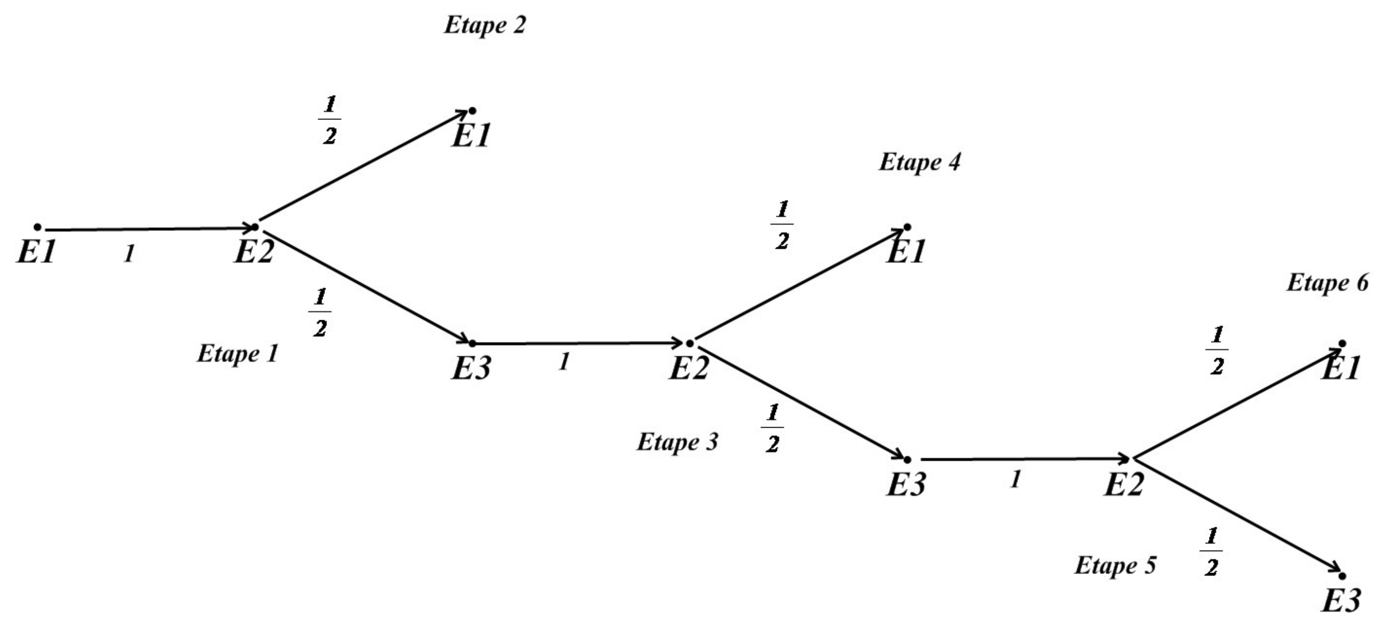
L'étude des chaînes de Markov montre que le retour à l'état initial est cependant quasi-certain.

L'espérance du temps de retour dans le cas de N particules est 2^N . Ainsi, pour un nombre de particules traité dans une situation macroscopique, le temps de retour est donc quasiment infini à notre échelle et non observable.

Etude de l'espérance du temps de retour dans le cas N=2



Arbre décrivant la situation des urnes durant les 6 premières étapes :



Espérance du temps de retour

Si on note T_n la variable aléatoire qui associe le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial ou qui associe 0 si on n'y revient pas en $2n$ étapes:

$$p(T_n = 1) = p(T_n = 3) = p(T_n = 5) = 0$$

$$\forall k,\ 0 \leq k \leq n-1,\quad p(T_n = 2k+1) = 0$$

$$p(T_n = 2) = \frac{1}{2} \qquad p(T_n = 4) = \frac{1}{2^2} \qquad p(T_n = 6) = \frac{1}{2^3}$$

$$\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\quad p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$$

Espérance du temps de retour

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{2n} kp(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} 2kp(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$$

A l'aide d'un travail sur le calcul de sommes, on montre que :

$$E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

Puis en faisant tendre *n* vers l'infini, on obtient une espérance de temps de retour moyen égal à 4 étapes.