Du partage du cycle 3 au quotient de la sixième

(Jean-François Chesné)

Il ne s'agit pas d'écarter une conception au profit de l'autre, mais d'abord de mettre en évidence un double point de vue, puis d'installer une cohérence entre l'ancien et le nouveau afin d'assurer leur coexistence.

L'article qui suit commence par des extraits des documents d'application, des documents d'accompagnement pour le cycle 3 de l'école primaire, et du programme de sixième. Je me pose ensuite des questions relatives à l'articulation entre l'école et le collège sur ce point crucial qu'est le passage du partage au quotient, et en particulier celles qui portent sur la multiplication.

Ce que disent les documents officiels

Extraits des documents d'application des programmes de cycle 3(p 21 à 24)

« Au cycle 3, une toute première approche des fractions est entreprise, dans le but d'aider à la compréhension des nombres décimaux. L'étude des fractions et des décimaux sera poursuivie au collège. (...) Les fractions et les nombres décimaux doivent donc apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de faon satisfaisante : problèmes de partage, de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage de point sur une droite. »

« En classe de sixième, un travail approfondi conduit à concevoir $\frac{7}{3}$ comme quotient de 7 par 3. Il est donc important que la signification « 7 fois le tiers de l'unité ou 7 fois $\frac{1}{3}$ » soit travaillé à l'école primaire.(...) Les élèves ont l'occasion de rencontrer des entiers sous écriture fractionnaire, à partir d'égalités comme $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{40}{10} = 4$. Ces égalités peuvent être justifiées : $\frac{9}{3}$, c'est « 9 tiers de l'unité, ou 3 fois 3 tiers de l'unité, donc 3 unités », ce qui peut être illustré à l'aide de segments. »

Extraits des documents d'accompagnement des programmes de cycle 3 (p 91 et 92)

« Au collège, notamment en sixième, où la notion de quotient occupe une place centrale, la signification de l'écriture fractionnaire est étendue à la fraction considérée comme quotient : $\frac{3}{4}$ est conçue comme le nombre quotient de 3 par 4, **nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 3**. Il appartient donc au professeur de collège de faire le lien entre les deux conceptions, celle utilisée à l'école élémentaire et celle qui est travaillée au collège, et de faire en sorte que le quotient $\frac{a}{b}$ acquiert le statut de nombre, nombre qui peut être approché par un décimal. »

Extraits des programmes de sixième

Ecriture fractionnaire

Interpréter $\frac{a}{b}$ comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme **le nombre qui multiplié par *b* donne *a*.** Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples.

Commentaires : à l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une « unité ». Les activités en sixième s'articulent autour de trois idées fondamentales :

- le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre
- le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a
- le nombre $\frac{a}{b}$ peut être approché par un décimal.

Par exemple, $\frac{7}{3}$ est un nombre que l'on pourra envisager comme :

- 7 fois un tiers
- le tiers de 7 ou le nombre qui multiplié par 3 est égal à 7
- un nombre dont une valeur approchée est 2,33.

Multiplier un nombre entier ou un décimal par un quotient de deux entiers sans effectuer la division.

Commentaires : il s'agit de « prendre une fraction » d'une quantité. L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution.

Commentaires personnels :

On voit clairement la volonté des concepteurs des programmes de favoriser l'articulation entre l'école et le collège, en reprenant le même exemple de $\frac{7}{3}$. *On peut également pointer des ambiguïtés : une écriture fractionnaire est-elle une convention d'écriture pour un partage (on serait alors plus proche d'un rapport de grandeurs) ou une écriture particulière d'un nombre ? Un quotient, le définit-on aussi bien comme le nombre par lequel il faut multiplier par ou le nombre qui multiplié par ?*

On pourrait répondre rapidement que tout est convention d'écriture, qu'on sait bien que l'ordre des facteurs dans une multiplication n'a pas d'effet sur le produit, mais on peut aussi s'interroger sur les raisons des difficultés des élèves au collège à effectuer des calculs sur des fractions (ou sur des entiers et des fractions). On peut donc légitimement s'interroger sur les conceptions des enseignants et sur leurs pratiques, mais aussi sur les contenus à enseigner et leurs explicitations dans les documents officiels. Ainsi, quand on lit page 23 des documents d'application du cycle 3, comme « exemples de décomposition » que :

$156{,}34 = 100 + 5 \times 10 + 6 + \mathbf{3} \times \frac{1}{10} + \mathbf{4} \times \frac{1}{100}$

$156{,}34 = 100 + 50 + 6 + \mathbf{3} \times \mathbf{0{,}1} + \mathbf{4} \times \mathbf{0{,}01}$ *on peut à juste titre se demander si on est toujours dans le partage ou dans le produit « d'un décimal par un entier »...*

La confusion entre « fois » et « multiplié », la fréquentation de différents types de situations multiplicatives, leur traduction avec le même symbole ×, la commutativité de la multiplication (justification ?dans quels ensembles de nombres ?) constituent de vrais sujets de questionnement auxquels il est essentiel de s'intéresser, du début de l'école élémentaire à la fin du collège.

Mais restons-en au travail à mener au cycle 3 à propos des fractions, celui qui est attendu en sixième, et sur l'articulation école-collège et tentons de mener une réflexion approfondie guidée par une lecture attentive des programmes.

Au cycle 3*, on partage une unité en 2, 3, 4,...par pliages ou grâce à l'utilisation d'un guide-âne. On illustre ainsi les fractions telles que un demi, un tiers, un quart dont on introduit les notations :* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

On peut ensuite définir $\frac{2}{3}$ *comme* $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, *c'est-à-dire 2 fois* $\frac{1}{3}$ *ou* $\frac{1}{3} \times 2$, *ou* $\frac{3}{4}$ *comme 3 fois* $\frac{1}{4}$, *soit* $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 3$. *On peut donc écrire en particulier des égalités telles que* $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ *(trois fois un tiers de l'unité, c'est l'unité) ou* $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ *(4 fois un quart de l'unité, c'est l'unité). On peut donc écrire que :* $\frac{3}{3} = 1$ *ou que* $\frac{4}{4} = 1$. *Cette introduction des fractions permet de considérer, avec les risques de confusions maintes fois évoqués au niveau des représentations, des fractions supérieures à l'unité : il suffit d'additionner un nombre de parts supérieur au nombre de parts en lequel on a partagé l'unité. On peut alors aisément justifier effectivement que «* $\frac{9}{3}$, *c'est 9 tiers de l'unité, ou 3 fois 3 tiers de l'unité, donc 3 unités ».*

Le lien avec les dixièmes, centièmes, ... et les décimaux paraît aisé, mais il y a déjà d'une certaine manière un passage implicite du partage au nombre, par la disparition de la référence permanente à l'unité. En effet, quand on écrit $\frac{3}{10}$, *autant l'idée de partage est présente quand on pense* $\frac{3}{10}$ *de l'unité, autant celle de nombre est proche quand on passe à 0,3. De même,* $2 + \frac{3}{10}$, *pensé comme 2 unités et trois dixièmes de l'unité, n'est déjà plus tout à fait le même quand il devient 2,3. On passe subrepticement de la notion de fraction à celle d'écriture fractionnaire d'un nombre, et les relations demandées par les programmes entre 0,5 et* $\frac{1}{2}$, *0,25 et* $\frac{1}{4}$, *ou 0,75 et* $\frac{3}{4}$, *même s'il est précisé que* « ces connaissances doivent être établies en référence à une expérience sur des longueurs, de capacités ou des aires *»,(p24 des documents d'application) s'appuient sur ce glissement de conception.*

Un autre moment de déstabilisation de la seule conception de fraction comme partage intervient quand on propose de partager un segment de longueur donnée (sans pliage, ni guide-âne). Par exemple, comment construire un segment dont la longueur est un quart d'un segment de longueur 12 cm ? (Evaluation à l'entrée en sixième, 2005, item 34). On attend d'un élève qu'il trace bien sûr un segment de longueur 4 cm car, selon les procédures disponibles, $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ *ou* $3 \times 4 = 12$ *ou* $12 : 4 = 3$.

De même, pour représenter un segment dont la longueur est un tiers d'un segment de longueur 12 cm, (Evaluation à l'entrée en sixième, 2005, item 35) on attend un segment de longueur 4 cm car $4 + 4 + 4 = 12$ *ou* $4 \times 3 = 12$ *ou* $12 : 3 = 4$.

Il s'agit donc pour les enseignants de cycle 3 d'être vigilants à ne pas écrire ***à cette occasion*** *que* $\frac{12}{4} = 3$ *ou que* $\frac{12}{3} = 4$*, parce que le partage de 12 unités en 4 parts égales ne correspond pas encore à 12 fois le quart de l'unité, ou que le partage de 12 unités en 3 parts égales ne correspond pas encore à 12 fois le tiers de l'unité.*

Autrement dit, le passage de 12 : 4 à $\frac{12}{4}$ *constitue un des enjeux de la sixième, comme* $\frac{3}{4}$ *devra apparaître comme le nombre quotient de 3 par 4, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 3.*

En sixième*, le problème posé aux professeurs pourrait donc se décrire ainsi : les élèves sortent du cycle 3 en sachant que* $\frac{3}{4} \times 4 = 3$*, puisque* $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4}$*. Il s'agit pour eux de leur faire comprendre* $\frac{3}{4}$ *est aussi l'écriture d'un nombre tel que* $4 \times \frac{3}{4} = 3$ *. On voit bien la différence entre « nombre qui multiplié par » et « nombre par lequel il faut multiplier».*

On peut enfin s'interroger sur le travail à effectuer sur « prendre une fraction d'une quantité » puisque « construire un segment dont la longueur est $\frac{5}{4}$ *de la longueur d'un segment de 12 cm, » (Evaluation à l'entrée en sixième, 2005, item 36) est une tâche déjà proposée à l'école. On peut supposer que les élèves ont effectué : 3 × 5 ou 12 + 3 selon qu'ils ont pensé* $\frac{5}{4}$ *comme 5 fois* $\frac{1}{4}$ *ou* $1 + \frac{1}{4}$*.*

Pour ceux qui ont pensé 3 comme le résultat de 12 : 4, on peut donc ne pas être loin de 12 : 4 ×5, qu'il s'agira de lier à $12 \times \frac{5}{4}$*.*

Dans le document d'accompagnement pour le collège « **Les nombres au collège** *» il est donc très curieux de découvrir le paragraphe 7 de la page 3. Reprenons les points cités en exemples :*

- *Ce qui est connu, ce n'est pas que* $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$*, mais que* $\frac{7}{4} = \frac{1}{4} \times 7$ *(sept quarts, c'est bien sept fois un quart ou un quart multiplié par sept)*

- *Sur la compatibilité sept fois un quart et le quart de 7 :*
    - *Le fait que* $\frac{7}{4} \times 4 = 7$ *n'est effectivement pas « difficile à gagner », comme le souligne la formulation en langage ordinaire.*
    - *Le raisonnement exprimé en langage symbolique ne correspond pas au langage ordinaire. On pouvait écrire tout simplement que :*

$\frac{7}{4} \times 4 = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} + \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{28}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 1+1+1+1+1+1+1 = 7$, *en parfaite cohérence avec le cycle3.*

Autrement dit, le problème soulevé par le recherche du nombre tel que : $? \times 4 = 7$ *n'est pas une véritable nouveauté pour les élèves, mais plutôt un changement de point de vue. Quoi qu'il en soit, on peut dire qu'on peut encore très bien s'en sortir avec l'addition itérée.*

- *L'écriture, avec la réserve nécessaire, mais ô combien problématique sur l'associativité qui est donnée ensuite, ne servirait « simplement » à expliciter que :*

$(7 \times \frac{1}{4}) \times 4 = 7$, *ce qui autoriserait a posteriori de justifier que* $7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 7$.

- *Subsiste en revanche le problème de* $4 \times ? = 7$ *(qui n'est pas rappeler une situation bien connue sur un certain puzzle !), mais qu'on peut traiter dorénavant de plusieurs façons, avec l'une ou l'autre des deux écritures.*

Remarques :

- *l'exemple de* $\frac{7}{4}$ *n'est pas le plus pertinent car* $7 : 4 = 1,75$ *ou encore* $1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. *Il aurait été plus judicieux de reprendre* $\frac{7}{3}$ *comme dans le programme de sixième, puisque* $7 : 3$ *ne permet pas d'accéder immédiatement à* $\frac{7}{3}$. *Ceci serait d'ailleurs à débattre, puisque comme l'évoque le document page 4 pour* $\frac{17}{3}$, *le lien avec la division euclidienne est évidemment très proche.*

- *les programmes ne mettent pas l'accent sur le glissement sémantique du « un » qui d'article indéfini (quand on partage l'unité en quarts, chaque quart « se vaut ») devient nombre* $(\frac{1}{4} = 0,25)$ *ni sur la différence entre un quart de 7 et le quart de 7 (la longueur d'un segment et l'abscisse d'un point de la demi-droite graduée).*

Conclusion et propositions

L'esprit du programme s'appuie implicitement sur l'addition itérée quand il fait référence à une fraction comme partage (et quand il limite la multiplication d'un décimal par un entier), mais les écritures données ne sont pas cohérentes. S'il est naïf de penser que la multiplication se limite à cette vision, il me semble qu'il faut être particulièrement vigilant, quand on veut construire des concepts, certes aux différentes écritures qui vont permettre de le représenter, mais en particulier à celle qui permet de les découvrir. Négliger cet aspect de l'apprentissage, ou vouloir aller trop vite vers des conventions dues à des propriétés algébriques non accessibles aux élèves me paraît tout à fait contradictoire avec une réelle acquisition de connaissances pour eux. « Il faut que l'enseignant garde constamment à l'esprit la nécessité de lier à chaque instant compréhension, sens, raisonnement d'une part, et d'autre part techniques, règles, tables et vocabulaire, c'est-à-dire ce qui est du domaine de la pensée, de la réflexion et ce qui est du domaine de la technique, de l'exécution. » (Le calcul au collège, texte de l'IG, juillet 2004)

Pour en revenir aux fractions, il serait certainement plus clair de convenir et d'écrire clairement que : $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a$ *en cycle 3, et que l'enjeu de la classe de sixième est d'écrire* $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. *Ceci aurait un certain nombre de conséquences, parmi lesquelles :*

- *la clarification de la signification de l'écriture décimale (par exemple, la valeur du chiffre des dixièmes est le nombre de dixièmes, c'est-à-dire le nombre de fois un dixième)*
- *la clarification de la modélisation des situations qui consistent à prendre une fraction d'une quantité puisque ces situations font en fait appel aux deux conceptions des fractions : on commence par prendre un* $b^{\text{ième}}$ *de c, puis a* $b^{\text{ièmes}}$ *de c, et écrire que prendre une fraction* $\frac{a}{b}$ *d'un nombre c se traduit par* $c \times \frac{a}{b}$ $(c \times \frac{1}{b} \times a$ *, et... l'associativité). Cette clarification permettrait de respecter le travail entamé à l'école primaire, comme quand il s'agit de tracer un segment dont la longueur est égale aux cinq quarts de celle du segment tracé, et d'engager une écriture plus favorable pour le passage à l'inverse. Pourquoi d'ailleurs ne pas définir explicitement comme contenu d'enseignement en sixième, que pour un naturel n, prendre le nième d'un nombre, c'est, ou bien diviser par n, ou bien multiplier par* $\frac{1}{n}$ *? Cela permettrait d'assurer la cohérence entre, par exemple, le double de 38 qu'on commencerait*

par écrire 38 × 2, et la moitié de 38, qui s'écrirait indifféremment 38 : 2 ou 38 × $\frac{1}{2}$.

(L'écriture $\frac{1}{2}$ *× 38 renverrait quant à elle au calcul, par exemple, de 38 bouteilles d'un demi-litre)*

- *la construction de formules basées sur du sens, ce qui favoriserait peut-être leur mémorisation et l'absence de confusions toujours surprenantes pour les professeurs :*
    - *le périmètre du carré est c + c + c+ c = c × 4, que c s'exprime sous la forme d'un entier, d'une écriture décimale ou fractionnaire*
    - *le périmètre d'un rectangle est L×2 + l×2 ou (L+ l)×2*
- *de façon générale, le travail sur les grandeurs et les grandeurs quotients dans le cadre de la résolution de problèmes (avec la possibilité de garder les unités dans les calculs)*
- *le passage progressif vers le calcul algébrique*