Sujet n°5 : loi de refroidissement

Approfondissement en terminale S
Groupe Mathématique Liaison Lycée-Université

Cette fiche a été réalisée par des enseignantes et des enseignants des lycées et des universités de l'Académie de Créteil.
Titre : loi de refroidissement.
Disciplines mises en jeu : Mathématiques et Sciences Physiques.

Objectifs :découvrir et travailler sur les équations différentielles du premier ordre.
Mise en place : une séance de TD et finir le reste en devoir maison.

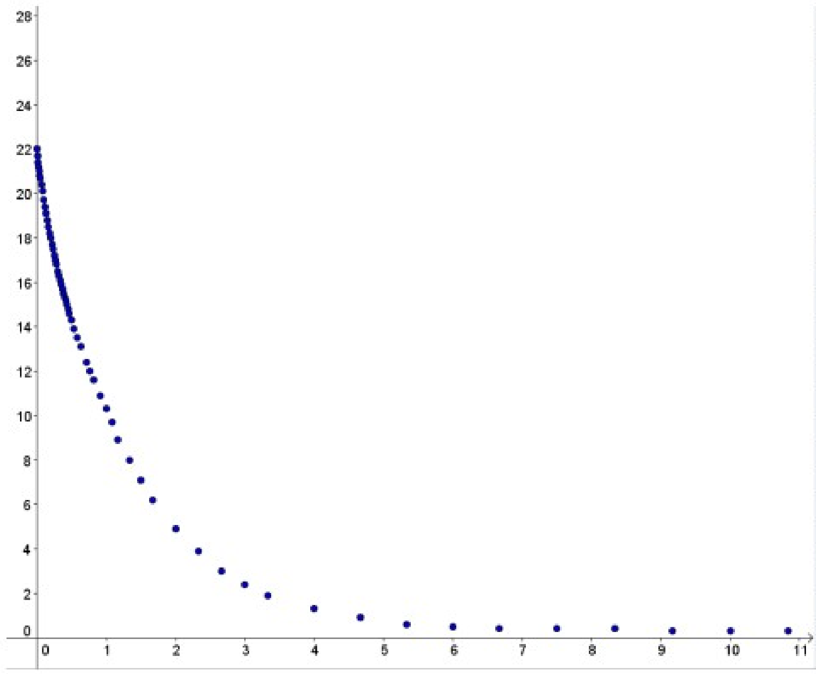
Contenu : après avoir découvert la définition d'une équation différentielle puis vu son intérêt en sciences physiques, on apprend à les résoudre à l'aide d'un logiciel de calcul puis « à la main ».

I) Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

1) Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}$
Calculer $f'(t)$ puis exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$.
On dit que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+3y=0$. Cela signifie que l'inconnue y est désormais *une fonction.* Dans cette question, on a montré que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+3y=0$
2) Montrer que pour tout réel r, la fonction $f(t)=r\,\mathrm{e}^{-3t}$ est solution de l'équation différentielle $y'+3y=0$.

II) Application pratique

Expérience physique : un récipient contenant de l'eau et un thermomètre sont placés dans une enceinte dont on maintient la température constante égale à 0°.
A l'instant t=0 (exprimé en heure) la température de l'eau est de 22°et on observe l'évolution de la température en fonction du temps
A l'aide du tableur de Geogebra, on obtient :



	A	B	C	D
1	Temps (h)	T (°C)		Temps (min)
2				
3	0	22		0
4	0.01	21.7		0.5
5	0.02	21.4		1
6	0.03	21.2		1.5
7	0.03	21		2
8	0.04	20.8		2.5
9	0.05	20.7		3
10	0.07	20.4		4
11	0.08	20.1		5
12	0.1	19.7		6
13	0.12	19.4		7
14	0.13	19.1		8
15	0.15	18.8		9
16	0.17	18.5		10
17	0.18	18.2		11
18	0.2	18		12
19	0.22	17.7		13
20	0.23	17.5		14
21	0.25	17.2		15
22	0.27	17		16
23	0.28	16.8		17
24	0.3	16.5		18

Il semble exister une relation entre la température de l'eau et le temps passé dans l'enceinte.

La loi de refroidissement de Newton affirme : « la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant »

A) Modélisation :

On note $f(t)$ la température de l'eau en fonction du temps.
t est le temps exprimé en heures et f la température exprimée en degrés.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

On suppose que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et on note f' sa dérivée.

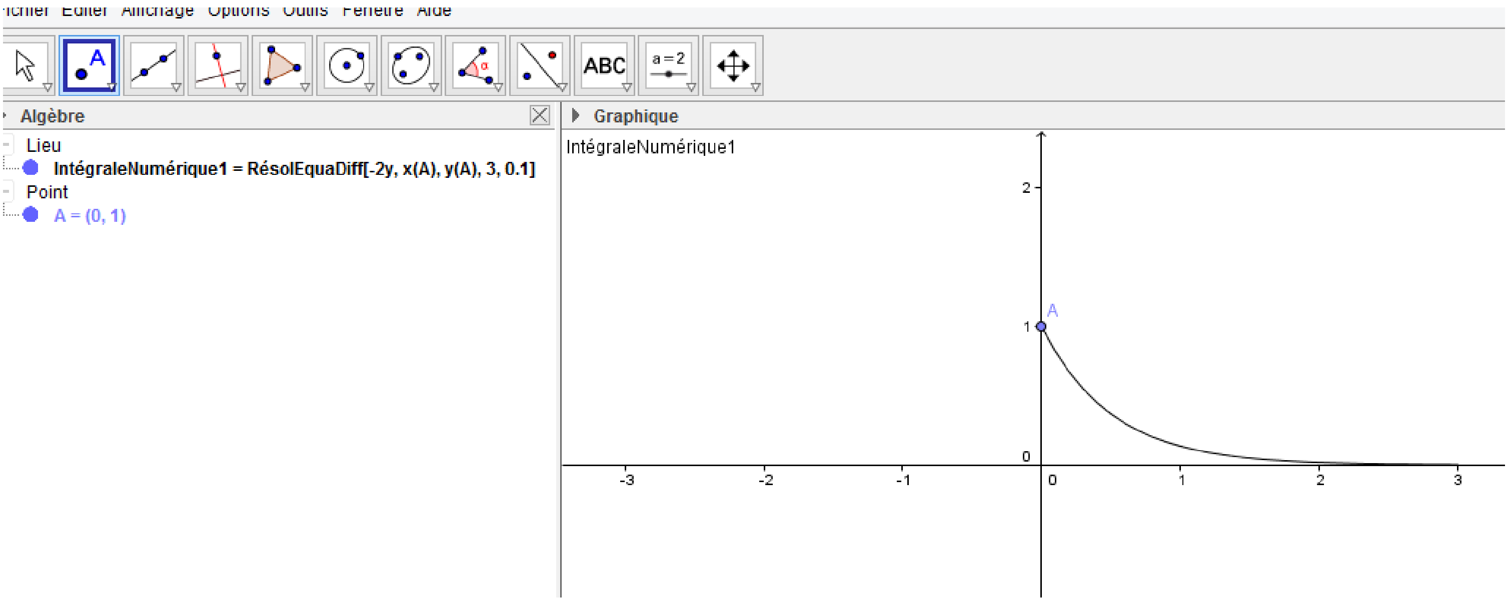
2) Que représente $f'(t)$?
3) Expliquer pourquoi la loi de refroidissement de Newton permet d'écrire $f'(t)=-kf(t)$?
On note (E_k) l'équation ainsi obtenue.
4) Quel est le signe de k ?
5) Dans le contexte de l'énoncé, que vaut $f(0)$? On appelle cela une condition initiale.

B) Analyse numérique :

Il s'agit de résoudre l'équation (E_k) dans un contexte général ; l'inconnue est la fonction f .
On dit que cette équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Utilisation de Géogébra pour représenter la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle :

La commande « RésolEquaDiff [f(x,y),< x initial>,<y initial>,<x final>,<pas>] permet de résoudre numériquement une équation différentielle du premier ordre en tenant compte des conditions initiales avec un pas donné. Le résultat affiché est un lieu.
Pour représenter une famille de courbes solutions, on peut activer la trace du lieu.
Voyons un exemple d'utilisation de RésolEquaDiff.
On va tracer la courbe représentative de la fonction solution de l'équation différentielle $y'=-2y$ avec $y(0)=1$ sur l'intervalle $[0;3]$
Il faut d'abord créer le point correspondant aux conditions initiales. On appelle A le point de coordonnées (0;1).
La séquence f(x,y) correspond au second membre de l'équation différentielle à savoir $-2y$



C) Résolution mathématique de (E_k) :

1) Montrer que la fonction g définie pour $t \geq 0$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$ est une solution de l'équation différentielle .

2) Soit h une solution quelconque de l'équation différentielle. En dérivant la fonction s définie par $s(t) = \dfrac{h(t)}{g(t)}$, montrer qu'il existe un réel r tel que $h(t) = r\,\mathrm{e}^{-kt}$

3) Vérifier la réciproque de la propriété précédente et déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle .

4) Déduire l'expression de la fonction température de la partie A.

5) Trouver à partir de quand la température est inférieure à 3° dans le cadre de l'expérience initiale.

6) Application:résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation : $f'(t) = 2f(t)$ avec $f(1) = 2$ .Vérifier votre résultat avec le logiciel Geogebra.