Exercices de trigonométrie

Exercice n°1 :

On considère un triangle ABC isocèle en A inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
On note H le pied de la hauteur issue de A.
On appelle x la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{HOC}$.
On suppose que x est dans l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$

On pourra s'aider d'une figure.
1) Donner en fonction de x l'aire de ABC.
2) On considère la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x)=\sin(x)(1+\cos(x))$$

Dresser le tableau de variations de f.
3) Démontrer qu'il existe une valeur de x que l'on déterminera pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC.

Exercice n°2 :

ABC un triangle rectangle en A.
Soit P un point du segment [BC] et soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de P sur (AB) et (AC).

1) Déterminer sur (BC) un point P tel que la distance (IJ) soit minimale. Est-il unique ?
2) Dans ce cas, comment doit être le triangle ABC pour que la droite (IJ) soit parallèle à (BC) ?

Exercice n°3 : linéarisation de polynômes trigonométriques

On considère la fonction $f(x)=5.\cos(x)-10\cos^3x+8.\cos^5x$
x est un réel compris entre 0 et π.

1) Montrer que l'on peut écrire cette fonction sous la forme $f(x)=A\cos(x)+b\cos(5x)$ avec A et B deux réels que l'on précisera.
2) Etudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative.
3) Calculer l'aire comprise entre cette courbe et les axes de coordonnées.

Indication optionnelle: on pourra montrer que $\cos(5x)=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos(x)$

Exercice n°4 : limites des fonctions sinus et cosinus

objectif de l'exercice : on veut montrer que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite en $+\infty$.

1) Expliquer pourquoi les fonctions sinus ou cosinus ne peuvent pas avoir de limite infinie en $+\infty$.
2) Expliquer le principe du raisonnement par l'absurde.
3) On suppose que la fonction sinus tend vers une limite finie l en $+\infty$. Soit une suite (u_n) tendant vers $+\infty$. Quelle est la limite de la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n=\sin(u_n)$? En prenant deux suites (u_n) judicieusement choisies, aboutir à une contradiction. Conclure.
4) Procéder de même avec la fonction cosinus.