Introduction aux Probabilités de Seconde

Contexte : Cours de Seconde - Approche à l'aide d'un texte historique (Leibniz – XVIIème)

Contenus

– Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
– Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
– Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
– Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités attendues

– Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
– Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
– Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.|

Expérience aléatoire : étude de la somme de deux dés bien équilibrés

1ère partie : Introduction au problème

- Recherche des issues possibles ;
- Chaque issue a-t-elle la même probabilité de se réaliser ?

2ème partie : Étude du texte de Leibniz.

Faut-il plutôt parier sur une somme qui vaut « 5 » ou « 8 » ?

Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour le quel des deux il faudrait plutôt parier. Je dis qu'il faut plutôt parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est à dire que je pourrais parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ai un grand avantage. Il est vrai que non obstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'aurai gagné plutôt que perdu.

Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voici la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4. l'autre 2 et 3. au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, savoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles), qu'il y a de manières.

Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables pour huit.
(…) *Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est à dire que cette maxime fondamentale aura lieu.*

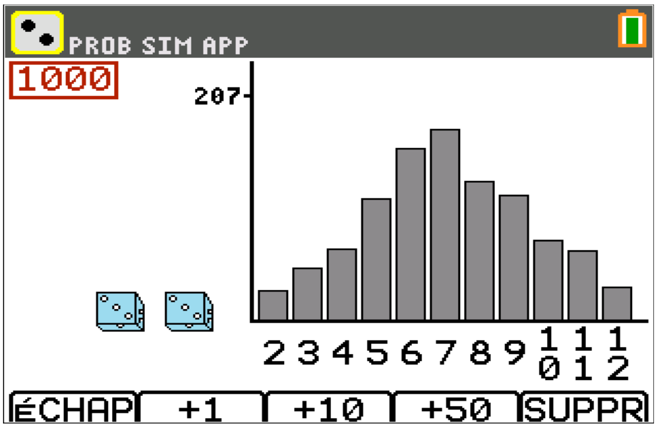
L'apparence ou probabilité de l'effect A, garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effect B, que le nombre de toutes les manières capables de produire l'effect A garde au nombre de toutes les manières de produire l'effect B, supposant toutes ces manières également faisables.

Source : LEIBNIZ Gottfried Whilhelm. *L'estime des apparences : 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Textes édités et présentés par Marc Parmentier. Paris :Vrin, 1995.

- Quelle est la pensée de Leibniz ?
- Quelle réponse semble apporter Leibniz au problème ?
- Comparaison entre le premier paragraphe et le deuxième paragraphe d'un point de vue mathématique (démonstration dans le deuxième paragraphe) ;
- Étude de la conclusion de Leibniz quant au calcul de probabilités.

3ème partie : Simulations

- Lancer de dés par les élèves ;
- Utilisation de la calculatrice graphique :



- Utilisation de Python ;

```
def simulationdés(n):
   f5=0
   f8=0
   for i in range(0,n):
        somme=randint(1,6)+randint(1,6)
        if somme==5:
            f5=f5 + 1
        if somme==8:
            f8=f8 + 1

    f5=f5/n
    f8=f8/n
    return (f5,f8)
```

- Conclusion : à l'aide de ces différentes simulations, peut-on penser qu'il vaut mieux parier sur le « 8 » que sur le « 5 » ?
- Réfléchir à la limite d'un point de vue mathématique de ces simulations ;
- Le rapport énoncé par Leibniz de « 3 sur 2 » semble-t-il se vérifier ?

4ème partie : Loi de probabilité

- Compléter un tableau à double entrée et/ou utilisation d'un arbre ;
- En déduire la loi de probabilité de cette expérience aléatoire ;
- Conclure au problème initial ;
- Trouver où se situe l'erreur de Leibniz.

5ème partie : Calculs de Probabilités

- Probabilité d'un événement ;
- Événement complémentaire ;
- Réunion d'événements et intersection d'événements ;
- Conjecture d'une formule entre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

Introduction aux probabilités à partir d'un texte historique

Contexte : On lance deux dés bien équilibrés et on s'intéresse à la somme des faces obtenues. Par exemple, si le premier dé indique « 3 » et le second « 4 », le résultat obtenu est 7

1. Quels sont les résultats possibles de cette expérience aléatoire ? Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?

2. A votre avis, est-il plus probable d'obtenir une somme valant 3 ou 4 ? Essayer de justifier brièvement.

3. A première vue, estimer la « chance » d'obtenir une somme valant 7.

On va se demander si chaque issue trouvée a la même probabilité. Par exemple, si on joue avec un ami est-il plus intéressant de parier sur une somme valant 5 que 8 ? Ou est-ce la même chose ?

4. Approche historique ***(Leibniz (1646-1716) : philosophe et mathématicien allemand) :***

   a/ Lire le texte de Leibniz.

Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour le quel des deux il faudroit plutost parier. Je dis qu'il faut plutost parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est à dire que je pourrois parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ay un grand avantage. Il est vray que non obstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'auray gagné plutost que perdu.

Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voicy la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4. l'autre 2 et 3. au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, sçavoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles), qu'il y a de manières. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant

faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables pour huit.
(…) *Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est à dire que cette maxime fondamentale aura lieu.*

L'apparence ou probabilité de l'effect A, garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effect B, que le nombre de toutes les manières capables de produire l'effect A garde au nombre de toutes les manières de produire l'effect B, supposant toutes ces manières également faisables.

Source : LEIBNIZ Gottfried Whilhelm. *L'estime des apparences : 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Textes édités et présentés par Marc Parmentier. Paris :Vrin, 1995.

b/ Expliquer, en français, ce que cherche à expliquer l'auteur.

c/ Expliquer la différence, d'un point de vue mathématique, entre les deux premiers paragraphes.

d/ Quelle conclusion semble apporter Leibniz au problème posé ?

5. ***Approche avec un ordinateur :*** la fonction suivante écrite en Python permet de tester *n* fois l'expérience et affiche la fréquence d'apparition d'une somme égale à 5 et d'une somme égale à 8.

```
def simulationdés(n):
   f5=0
   f8=0
   for i in range(0,n):
        dé=randint(1,6)+randint(1,6)
        if dé==5:
            f5=f5 + 1
        if dé==8:
            f8=f8 + 1

    f5=f5/n
    f8=f8/n
    return (f5,f8)
```

On a testé l'algorithme avec n = 10000 et on a obtenu que $fréquence5 = 0{,}1111$ et $fréquence8 = 0{,}1385$.

a. A partir de ce résultat, que peut-on conjecturer ?

b. Ce résultat permet-il de conclure de façon certaine ? Expliquer.

c. Le rapport énoncé par Leibniz semble-t-il se vérifier ici ? Justifier à l'aide d'un calcul.

5. A l'aide de vos connaissances de classe de troisième, quel « outil » probabiliste peut servir pour répondre au problème initial posé ? S'en servir pour essayer de répondre au problème.

6. Remplir le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Quel outil semble le plus adapté à la situation actuelle ?

7. **Donner la loi de probabilité, c'est donner à chaque issue possible de l'expérience aléatoire la probabilité qui lui est associée.** Pour cela, on complétera à chaque fois un tel tableau. Le compléter dans notre cas.

Issues											
Probabilités											

8. Conclure au problème initial posé.

9. En vous servant de la question 7, peut-on effectuer un reproche à Leibniz quant à sa conclusion ? Justifier votre réponse.

10. On note A l'événement « la somme obtenue est paire ». Que vaut $P(A)$?

11. On note B l'événement « la somme obtenue est supérieure ou égale à 10 ». Que vaut $P(B)$?

12. On note $A \cup B$ l'événement qui regroupe les issues réalisant A **ou** B.
    a. Quelles sont les issues réalisant l'événement $A \cup B$?

    b. En déduire la valeur de $P(A \cup B)$.

13. On note $A \cap B$ l'événement qui regroupe les issues réalisant A **et** B.
    a. Quelles sont les issues réalisant l'événement $A \cap B$?

    b. En déduire la valeur de $P(A \cap B)$.

    c. Peut-on conjecturer une formule liant les valeurs de $P(A), P(B), P(A \cup B) et P(A \cap B)$?

14. On note $\bar{A}$ l'événement contraire à l'événement A.
    a. Dans l'exemple, que représente ici l'événement $\bar{A}$? $\bar{B}$?

    b. Déterminer la valeur de $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$.