Groupe de réflexion académique du lycée

SEANCE : Irrationalité de racine de 2

FICHE ENSEIGNANT

Niveau concerné

Seconde

Ce qui est écrit dans le programme...

Démonstration : Le nombre réel $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Modalités et matériels

Cette activité est à réaliser en groupe homogène

Un bilan fait par chaque groupe afin de montrer son raisonnement.

Objectifs

L'activité 1 permet de mettre en place le raisonnement par l'absurde pour montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Cette activité peut être faite bien en amont de l'activité2.

L'activité 2 propose différents raisonnements pour montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Chaque groupe homogène a un travail différencié. En fonction du niveau de la classe, il est possible de proposer l'ensemble des travaux aux élèves ou d'en proposer quelques-uns.

L'objectif est de montrer plusieurs 'preuves' de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

La compétence communiquer est travaillée dans cette activité puisque chaque groupe doit présenter à l'oral sa démonstration.

Une activité préparatoire est proposée en travaux de groupes. Elle a pour but la mise en place du raisonnement par l'absurde. Puis des travaux différenciés sont distribués en travaux de groupes et chaque groupe doit faire l'exposé devant la classe de son travail.

Activité préparatoire pour mettre en place un raisonnement par l'absurde par travail de groupes et sans calculatrice

- Tracer un segment de longueur $\sqrt{2}$ cm à la règle et au compas (pour revenir à la première rencontre avec ce nombre)
- Encadrer $\sqrt{2}$ par deux nombres entiers
- Encadrer $\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux
- $\sqrt{2}$ Peut-il être un nombre décimal ?

  Méthodes qui mettent en place le raisonnement par l'absurde : Tests avec nombres décimaux et on élève au carré et on compare le dernier chiffre du carré du nombre décimal avec 0.... pour les plus avancés essayer de trouver une démonstration en revenant à la définition d'un nombre décimal (d *est un nombre décimal s'il existe un entier naturel* n *tel que* $d\times 10^n$ *soit un nombre entier...) . Mise en place du raisonnement par l'absurde.*

Travail différencié 1 :

Partie 1 : un peu de culture avec calculatrice autorisée

En 1897, Edward Goodwin fit voter en première lecture à l'assemblée générale de l'Indiana que la vraie valeur de $\sqrt{2}$ est $\frac{10}{7}$.
Source : <u>le fabuleux destin de</u> $\sqrt{2}$ Benoit Rittaud Edition Le Pommier

- A-t-on $\sqrt{2}=\frac{10}{7}$?
- Essayer de trouver la fraction la plus proche de $\sqrt{2}$.

Partie 2 : une démonstration sans calculatrice

On veut démontrer que $\sqrt{2}\neq\frac{17}{12}$.

Pour cela on suppose que $\sqrt{2}=\frac{17}{12}$.

- Comment en déduire alors que $2\times 144=17^2$?
- Est-ce possible ? (*2 méthodes sont possibles : chiffre des unités ou parité*)

Travail différencié 2 : comparaison du chiffre des unités

Soit p et q deux entier naturels non nuls. On rappelle qu'une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible lorsque le seul diviseur commun à p et q est 1.

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On va donc raisonner par l'absurde.

Pour cela on suppose qu'il existe deux nombres entiers strictement positifs p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

1. Montrer que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ équivaut à $p^2=2q^2$.
2. Compléter le tableau suivant :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										
Chiffre des unités de q										
Chiffre des unités de $2q^2$										

3. En analysant le tableau, montrer que p et q sont alors deux multiples de 5 puis conclure.

Travail différencié 3 : Trouver une fraction égale à $\sqrt{2}$ de dénominateur plus petit que q, calculs algébriques

Soient p et q deux entier naturels non nuls. On rappelle qu'une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible lorsque le seul diviseur commun à p et q est 1.

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

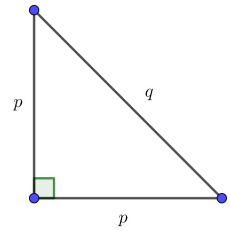
On va donc raisonner par l'absurde.

Pour cela on suppose qu'il existe deux nombres entiers strictement positifs p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

1. Expliquer pourquoi $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2. En déduire que $q<p$.
2. En déduire que $2q-p<p$.
3. Montrer que $p-q<q$.
4. Montrer que $\frac{2q-p}{p-q}=\sqrt{2}$.
5. En déduire une contradiction.

Travail différencié 4 : support géométrique et problème

Partie 1



1. Est-il possible de construire un triangle rectangle dont les côtés sont des nombres entiers ?
2. On cherche à construire des triangles rectangles isocèles à côtés entiers.

   Soit p et q deux entier naturels non nuls.

   Montrer que construire ces triangles revient à établir que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

Partie 2

Soit p et q deux entier naturels non nuls. On rappelle qu'une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible lorsque le seul diviseur commun à p et q est 1.

On suppose qu'il existe deux nombres entiers strictement positifs p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

1. Démontrer que si $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, alors $p^2=2q^2$.
2. Démontrer que p^2 est pair.
3. Compléter le tableau suivant :

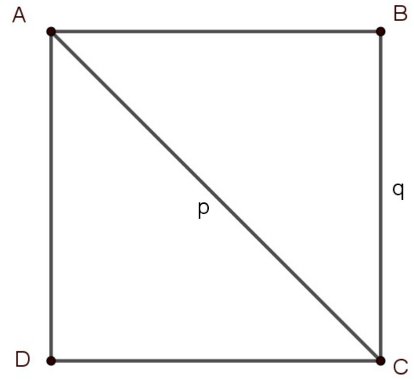
Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										

   En déduire que p est pair.

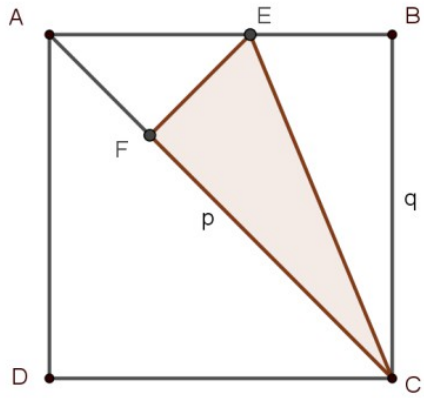
   On peut donc écrire $p=2\times k$ avec k nombre entier naturel.

4. En déduire la parité de q^2 puis la parité de q.
5. En déduire que p et q ont un autre diviseur commun autre que 1 et ainsi que $\sqrt{2}\neq\frac{p}{q}$
6. Conclure quant à l'existence de triangle rectangle isocèle à côté entier.

Travail différencié 5 : une démonstration avec support géométrique



1. Expliquer alors pourquoi cela revient à rechercher le plus petit triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesure q et l'hypoténuse p (triangle ABC de la figure). (*)



2. On replie le côté [BC] sur la diagonale [AC] de telle façon que le point B coïncide avec le point F. Réaliser réellement ce pliage.
3. Démontrer que le triangle AEF est rectangle en F et donner ses dimensions
4. Démontrer que $\frac{AE}{AF}=\sqrt{2}$
5. Rechercher la contradiction avec (*)

Travail différencié 6 : Descente infinie

Introduction :

Un bien joli nom que ce type de raisonnement mis au point par Fermat : si on veut prouver qu'un problème n'a pas de solutions en nombres entiers, on montre que, s'il en admettait une, il en aurait une autre avec des nombres plus petits, avait écrit Grosrouvre. « D'accord, mais pourquoi est-ce une preuve ? se demanda M. Ruche. Pardi, parce qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à un entier donné. C'est-à-dire, justement parce que la descente n'est pas infinie ! »
Soit un escalier qui démarre au rez-de-chaussée, si chaque fois que l'on se trouve sur une marche on est obligé de redescendre sur la marche précédente, il arrive un moment – le moment où l'on atteint le rez-de-chaussée – où l'on ne peut descendre plus bas. Or notre hypothèse nous contraint de descendre toujours plus bas. Contradiction ! L'hypothèse est donc fausse. Donc aucun nombre ne possède la propriété en question. CQFD. M. Ruche apprécia ce mélange subtil de raisonnement par l'absurde et de raisonnement par récurrence à rebrousse-poil.

Denis Guedj, "Le théorème du perroquet", *Roman Seuil,* 1998 - chapitre 19, page 378

Une descente infinie de Fermat (XVII ème siècle) :

(Source : https://images.math.cnrs.fr/Autoportrait-de-racine-de-2.html)

1. Lire cette démonstration :

Je dessine un triangle rectangle isocèle rectangle en A dont les côtés de l'angle droit meurent 1.

L'hypoténuse mesure donc $\sqrt{2}$ (par le théorème de Pythagore). Je suppose que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec p et q deux nombres entiers. Je sais que $p>q$ (parce que $\sqrt{2}>1$). Je multiplie tout par q. J'obtiens un triangle rectangle isocèle ABC dont les côtés de l'angle droit mesurent q et l'hypoténuse p . Je plante la pointe de mon compas en B et je trace un arc de cercle de rayon q . Il coupe l'hypoténuse en un point A' . La perpendiculaire à l'hypoténuse passant par A' coupe le côté $[AC]$ en un point B' .
Le triangle $A'B'C$ est rectangle isocèle, ses côtés de l'angle droit mesurent $p-q<p$.

Ainsi, j'ai construit un triangle rectangle isocèle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers et qui est strictement plus petit que le précédent.

On peut recommencer... mais ce processus devrait avoir une fin.

2. Réaliser une figure correspondant à cette démonstration.
3. Pourquoi ce processus devrait avoir une fin ?
4. Conclure alors sur la nature du nombre $\sqrt{2}$.