EXPLOITATIONS PEDAGOGIQUES DU TABLEUR EN STG

Commission inter-IREM lycées techniques
contact : dutarte@club-internet.fr

La maquette du **baccalauréat** dans la série STG prévoit la possibilité d'exercices avec des images d'écran de tableur (comme c'est le cas en maths-info en série L), il est donc nécessaire d'y préparer les élèves :

> « *Pour des parties du sujet concernant l'utilisation d'un tableur ou des traitements de données statistiques, les énoncés sont adaptés au contexte de l'enseignement et aux modalités de l'épreuve. Certains éléments qui pourraient être nécessaires (copies d'écran, résultats de calcul, etc.) seront fournis sur papier avec les sujets.* »
> (BO n°12 du 23 mars 2006).

Au delà de cette « contrainte » de l'examen, les quelques exemples développés ici[1] ont pour objectif de montrer comment l'utilisation du tableur en classe (sous forme de travaux pratiques, lorsque cela est possible, ou de vidéo projection, ou même d'exercices « papier ») peut **favoriser l'apprentissage des mathématiques** en STG.

0 – Ce que l'utilisation du tableur en mathématiques ne doit pas être…

Ce paragraphe se veut rassurant. Il ne s'agit pas de transformer le professeur de mathématiques en un technicien informatique chargé d'expliciter le mode d'emploi du tableur.
Voici, à ce propos, quelques extraits du programme de STG :

> *« Il ne s'agit pas pour l'élève de devenir expert dans l'utilisation de tel ou tel logiciel. »*
> *« ...les élèves [ont] l'occasion d'acquérir dans d'autres disciplines une bonne pratique du tableur. »*
> *« L'objectif n'est pas d'étudier un tableur, mais d'utiliser des feuilles de calcul pour illustrer des situations et résoudre des problèmes en liaison avec les contenus du programme. »*

Le tableur est un outil qui a été développé pour la gestion et que les élèves pratiquent dans cette discipline technique. On peut donc s'appuyer sur leurs compétences techniques du tableur mais en mathématiques :

- on ne fait pas « du tableur pour le tableur » ;
- l'objectif n'est pas un « mode d'emploi » de fonctions spécialisées du tableur (en particulier des fonctions financières) ;
- il ne s'agit pas de substituer le tableur aux mathématiques (c'est-à-dire de masquer le contenu mathématique d'un calcul par l'utilisation d'une fonction ad-hoc du tableur).

Dans ce qui suit, nous montrons, sur quelques exemples, comment, dans le cadre du programme, utiliser le tableur au service des mathématiques.

---

[1] Un grand nombre d'exemples présentés dans ce document proviennent d'ouvrages publiés aux Editions Foucher en 2005 et 2006.

1 – Le tableur permet de se « libérer » du calcul

Bien sûr, se libérer du calcul n'est peut-être pas l'objectif prioritaire du professeur de mathématiques. Cependant, les choses ont bien changées depuis l'époque où le banquier calculait les intérêts « à la main » ou en compulsant des tables et l'essentiel des mathématiques n'est pas dans le calcul.

Se « libérer » du calcul permet :

- de surmonter des « blocages » et de ramener certains « égarés » vers les mathématiques ;
- de se concentrer sur l'interprétation et la compréhension ;
- de pouvoir aborder des exemples plus riches… Le programme officiel affirme à cet égard que « *pour certaines résolutions, le tableur-grapheur est indispensable* ».

a – Le coût d'un crédit est-il proportionnel à la durée ?

Dans l'exemple suivant, on répond à une question mathématique (a-t-on proportionnalité), dans un contexte concret et qu'il est impossible d'envisager sans l'assistance calculatoire du tableur.

On suppose vouloir emprunter une somme de 100 000 € au taux de 4 % et étudier le coût du crédit selon la durée de celui-ci.

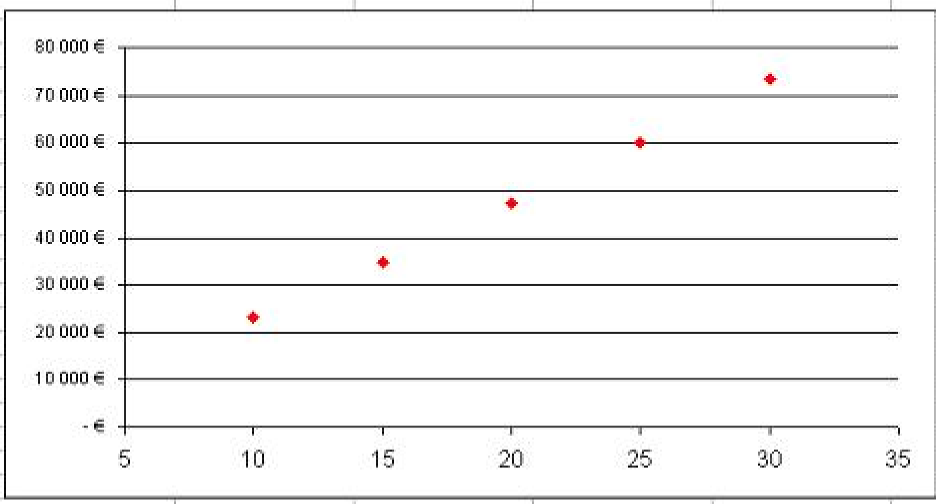
En B6, l'annuité a été calculée selon la formule mathématique =$B3*$B4/(1-(1+$B4)^-B5) .

A titre de comparaison, on a utilisé en B7 une formule financière du tableur en entrant =-VPM($B4;B5;$B3) .

Les sommes totales versées sont obtenues en entrant en B8 la formule =B5*B6 et on en déduit le coût du crédit en entrant en B9 la formule =B8-$B3 .

B6 = =$B3*$B4/(1-(1+$B4)^-B5)

	A	B	C	D	E	F
1	**Le coût d'un crédit est-il proportionnel à la durée ?**					
2						
3	Somme empruntée	100 000,00 €				
4	Taux	4,00%				
5	Durée (années)	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
6	Annuité	12 329,09 €	8 994,11 €	7 358,18 €	6 401,20 €	5 783,01 €
7	Annuité par VPM	12 329,09 €	8 994,11 €	7 358,18 €	6 401,20 €	5 783,01 €
8	Sommes versées	123 290,94 €	134 911,65 €	147 163,50 €	160 029,91 €	173 490,30 €
9	Coût du crédit	**23 290,94 €**	**34 911,65 €**	**47 163,50 €**	**60 029,91 €**	**73 490,30 €**
10	Différences		**11 620,71 €**	**12 251,85 €**	**12 866,41 €**	**13 460,39 €**

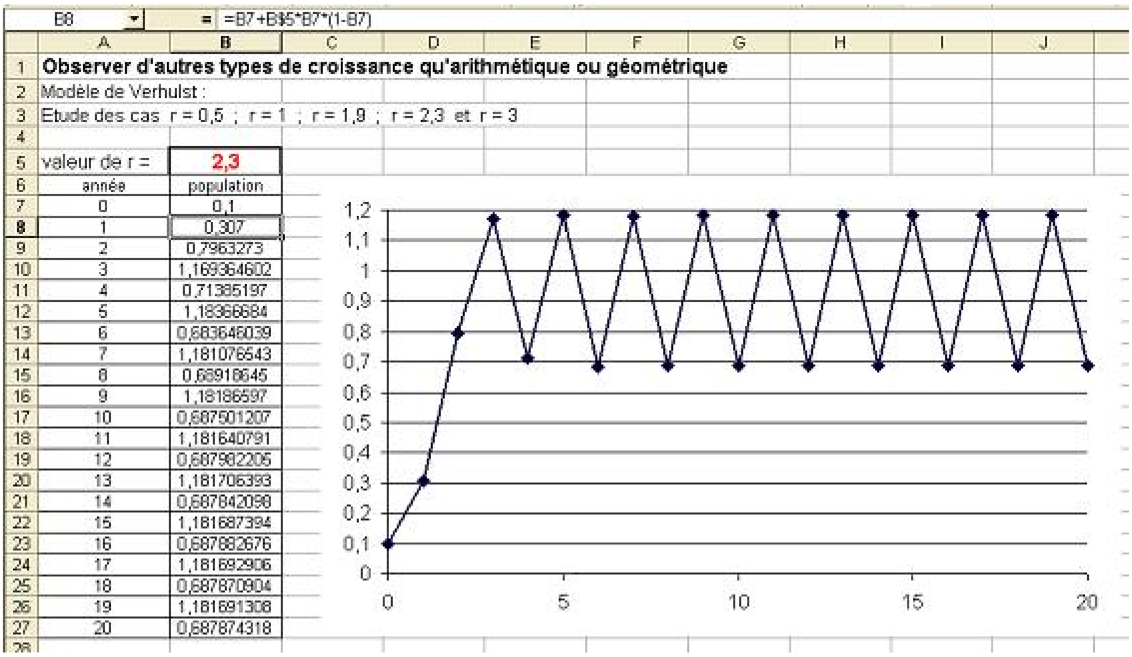


Il suffit alors de sélectionner les cellules de B6 à B9 puis de les recopier vers la droite.

Pour répondre à la question posée, on peut associer le non alignement des points sur le graphique et le calcul des différences successives.

b – Modèle de Verhulst

Le tableur est particulièrement adapté à l'étude des suites récurrentes, libérant l'élève non seulement de la contrainte du calcul, mais aussi de celle de la notation indicielle.
Le programme de STG suggère « d'observer d'autres types de croissance qu'arithmétique ou géométrique ». On considère ici le modèle de Verhulst pour lequel la population u_n l'année n vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r\,u_n\,(1 - u_n)$ et $u_0 = 0{,}1$.
Il s'agit d'observer la « croissance » de cette population pour différentes valeurs de r.
La valeur de r est entrée en B5 et celle de u_0 en B7.
Il suffit d'entrer en B8 la formule =B7+B$5*B7*(1-B7) (étudier le rôle des références relatives et absolues des cellules) puis de la recopier vers le bas, pour interpréter (du point de vue du comportement mathématique) les résultats affichés.
Pour $r = 1{,}9$ on a « convergence » alors que pour $r = 3$ on observe une situation « chaotique ».



B8 = =B7+B$5*B7*(1-B7)

Observer d'autres types de croissance qu'arithmétique ou géométrique

Modèle de Verhulst :

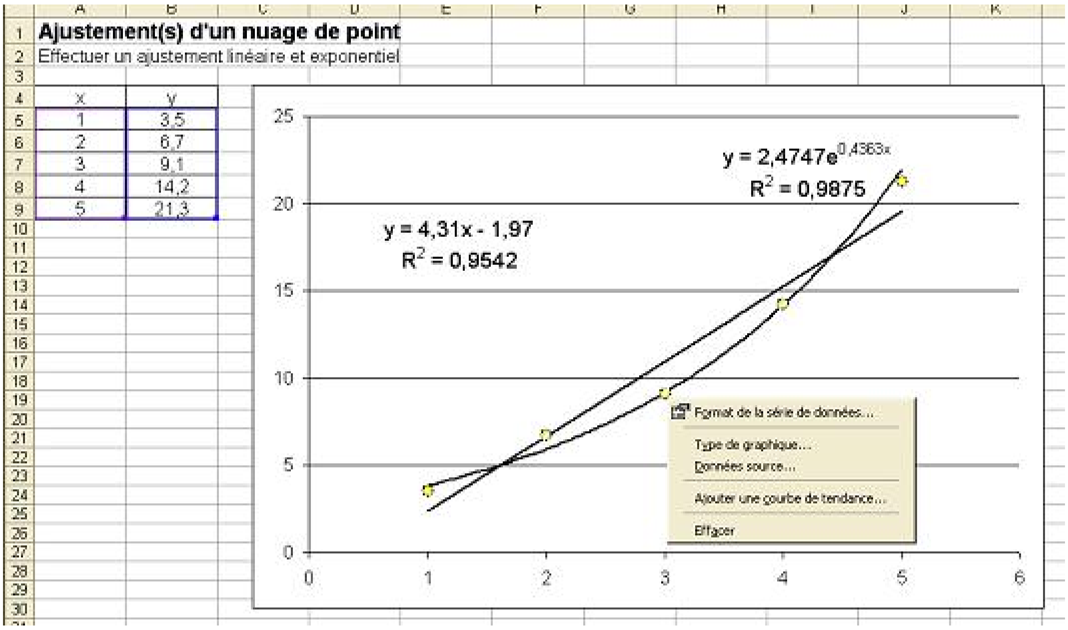
Etude des cas r = 0,5 ; r = 1 ; r = 1,9 ; r = 2,3 et r = 3

valeur de r = 2,3

année	population
0	0,1
1	0,307
2	0,7963273
3	1,169364602
4	0,71385197
5	1,18366684
6	0,683646039
7	1,181076543
8	0,68918645
9	1,18186597
10	0,687501207
11	1,181640791
12	0,687982205
13	1,181706393
14	0,687842098
15	1,181687394
16	0,687882676
17	1,181692906
18	0,687870904
19	1,181691308
20	0,687874318

c – Ajustements d'un nuage de points

Les calculs nécessaires à l'ajustement d'une courbe à un nuage de point (selon les moindres carrés) sont particulièrement pénibles et inintéressants. Sur un tableur, il suffit de faire un clic droit sur un point du nuage et de choisir « Ajouter une courbe de tendance… » pour obtenir, comme sur l'exemple suivant, un ajustement affine ou exponentiel (on ne demandera pas l'affichage de R^2 qui n'est pas au programme de STG).
Libérés du calcul, on pourra faire porter l'enseignement sur le sens de ces ajustements et l'exploitation que l'on peut en faire (les « estimations » seront assez différentes selon que l'on « prolonge » la droite ou la courbe exponentielle…).



2 – Le tableur permet d'illustrer et d'expérimenter

Le tableur peut favoriser une approche plus visuelle et davantage expérimentale des mathématiques. Au fil du programme de STG on lit par exemple que :

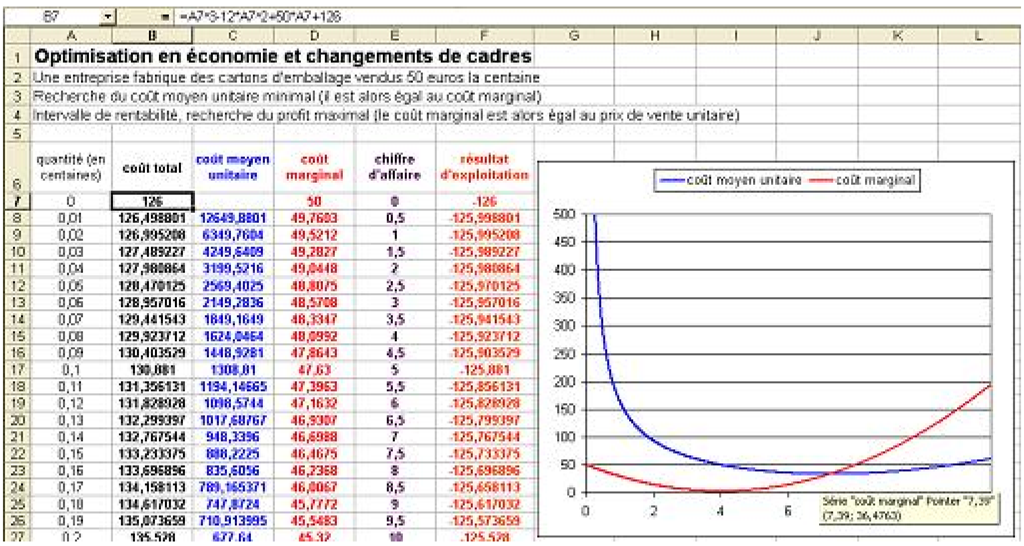
> *« L'exploration ou la construction de feuilles de calcul permet d'observer… »*
>
> *« Le tableur et la calculatrice gardent une place privilégiée par les possibilités d'investigation qu'ils permettent. »*

On verra dans les exemples qui suivent que l'utilisation du tableur permet, en particulier :

- de favoriser les changements de cadre : graphique / numérique ;
- d'exploiter la possibilité de changer la valeur d'une cellule pour expérimenter l'impact d'un paramètre et voir les formules mathématiques « en action ».

a – Optimisation en économie et changements de cadre

La page de tableur facilite les échanges entre les cellules de calcul (dans l'exemple ci-dessous, les calculs sont exhaustifs, pour chaque unité produite) et les graphiques.



quantité (en centaines)	coût total	coût moyen unitaire	coût marginal	chiffre d'affaire	résultat d'exploitation
0	126		50	0	-126
0,01	126,498801	12649,8801	49,7603	0,5	-125,998801
0,02	126,995208	6349,7604	49,5212	1	-125,995208
0,03	127,489227	4249,6409	49,2827	1,5	-125,989227
0,04	127,980864	3199,5216	49,0448	2	-125,980864
0,05	128,470125	2569,4025	48,8075	2,5	-125,970125
0,06	128,957016	2149,2836	48,5708	3	-125,957016
0,07	129,441543	1849,1649	48,3347	3,5	-125,941543
0,08	129,923712	1624,0464	48,0992	4	-125,923712
0,09	130,403529	1448,9281	47,8643	4,5	-125,903529
0,1	130,881	1308,81	47,63	5	-125,881
0,11	131,356131	1194,14665	47,3963	5,5	-125,856131
0,12	131,828928	1098,5744	47,1632	6	-125,828928
0,13	132,299397	1017,68767	46,9307	6,5	-125,799397
0,14	132,767544	948,3396	46,6988	7	-125,767544
0,15	133,233375	888,2225	46,4675	7,5	-125,733375
0,16	133,696896	835,6056	46,2368	8	-125,696896
0,17	134,158113	789,165371	46,0067	8,5	-125,658113
0,18	134,617032	747,8724	45,7772	9	-125,617032
0,19	135,073659	710,913995	45,5483	9,5	-125,573659
0,2	135,528	677,64	45,32	10	-125,528

On considère ici qu'une entreprise fabrique des cartons d'emballage vendus 50 € la centaine pour lesquels le coût de fabrication de x centaines est $x^3 - 12x^2 + 50x + 126$.

On a entré en B7 la formule =A7^3-12*A7^2+50*A7+126 qui calcule le coût total et en D7 la formule =3*A7^2-24*A7+50 correspondant à l'expression de la dérivée pour le calcul du coût marginal.
Les formules ont ensuite été recopiées vers le bas.
On peut vérifier que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal, sur le graphique, puis dans la zone de calcul.
On constatera de même que le profit est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

b – Temps de doublement d'un capital

On a placé une somme de 1000 € à un taux de *t* %. On s'intéresse au temps de doublement du capital.
Le taux (ici 2,5 %) est entré en cellule et B7 et on a calculé la suite des sommes obtenues en entrant en F9 la formule =F8*(1+B$7) recopiée vers le bas.

A11 = =LN(2)/LN(1+B7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Temps de doublement d'un capital**									
2	Lorsque le taux t est petit, on utilise parfois comme formule du temps de doublement : **70 / (100 t)**									
3	Comparaison avec la formule exacte : **ln 2 / ln(1 + t)**						Erreur commise pour t valant 1%, 2%, 3%, 5%			
4	Explication : approximation affine de ln(1 + t) par t et approximation de ln 2 par 0,7									
5										
6										
7	Taux t	2,50%			n	u(n)				
8					0	1000				
9	Temps de doublement				1	1025				
10	exact	approché			2	1050,625				
11	28,071035	28			3	1076,8906				
12					4	1103,8129				
13	Erreur :	0,0710345	année		5	1131,4082				
14		0,8524143	mois		6	1159,6934				
15					7	1188,6858				
16					8	1218,4029				

On compare la formule exacte du temps de doublement, entrée en A11 sous la forme =LN(2)/LN(1+B7) à la formule approchée =70/(100*B7) entrée en B11.
La formule approchée correspond à l'approximation $\ln(1 + t) \approx t$ pour t petit.
En modifiant le taux *t* contenu dans la cellule B7, on peut expérimenter la qualité de cette approximation.

3 – Le tableur favorise la compréhension de certaines notions mathématiques

Le programme officiel cite en particulier deux domaines, les suites et la statistique, mais ce ne sont pas les seuls :

> *« Le tableur est un outil particulièrement adapté à l'introduction des suites arithmétiques et des suites géométriques. »*
> *« …entraîner les élèves à la pratique de la démarche propre à la statistique en tirant parti des possibilités offertes par les outils informatiques… »*

Les exemples suivants montrent l'intérêt du tableur pour :

- l'introduction,
- la compréhension,
- l'acquisition et la pratique

de notions mathématiques nouvelles.

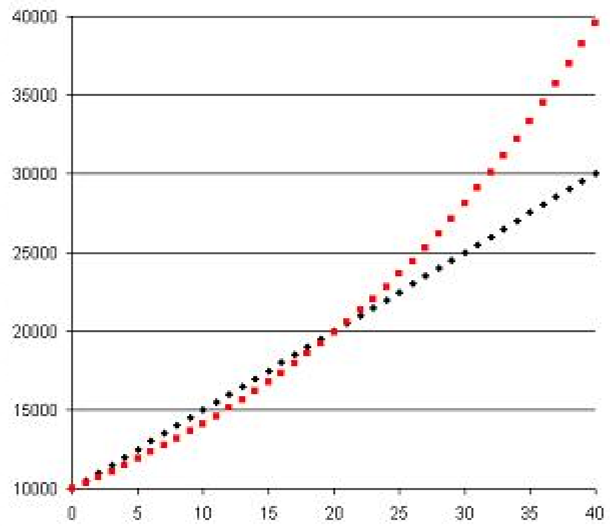
a – Placements et suites arithmétiques ou géométriques

Pour illustrer les suites arithmétiques et géométriques, on peut considérer une somme de 10 000 € placée soit à 5 % à intérêts simples, soit à 3,5 % à intérêts composés.
Le principe du tableur (par incrémentation des références non absolues des cellules lors de la recopie) est particulièrement adapté aux calculs récurrents et en favorise la compréhension alors que la notation indicielle est d'une maîtrise plus délicate.
Pour la suite arithmétique, on entre ici en B8 la formule =B7+C$5*C$7 qui est ensuite recopiée vers le bas. On peut demander de cliquer dans la cellule B15 par exemple et d'analyser la formule qu'elle contient : =B14+C$5*C$7 .
Pour la suite arithmétique, on entre en D8 la formule =D7*(1+E$5) qui correspond à la multiplication du résultat contenu dans la cellule précédente par une constante.

B8 = =B7+C$5*C$7

Placements et suites arithmétiques ou géométriques

	A	B	C	D	E
4		Intérêts simples		Intérêts composés	
5		taux	5,00%	taux	3,50%
6	rang n	récurrence	directe	récurrence	directe
7	0	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €
8	1	10 500,00 €	10 500,00 €	10 350,00 €	10 350,00 €
9	2	11 000,00 €	11 000,00 €	10 712,25 €	10 712,25 €
10	3	11 500,00 €	11 500,00 €	11 087,18 €	11 087,18 €
11	4	12 000,00 €	12 000,00 €	11 475,23 €	11 475,23 €
12	5	12 500,00 €	12 500,00 €	11 876,86 €	11 876,86 €
13	6	13 000,00 €	13 000,00 €	12 292,55 €	12 292,55 €
14	7	13 500,00 €	13 500,00 €	12 722,79 €	12 722,79 €
15	8	14 000,00 €	14 000,00 €	13 168,09 €	13 168,09 €
16	9	14 500,00 €	14 500,00 €	13 628,97 €	13 628,97 €
17	10	15 000,00 €	15 000,00 €	14 105,99 €	14 105,99 €
18	11	15 500,00 €	15 500,00 €	14 599,70 €	14 599,70 €
19	12	16 000,00 €	16 000,00 €	15 110,69 €	15 110,69 €
20	13	16 500,00 €	16 500,00 €	15 639,56 €	15 639,56 €
21	14	17 000,00 €	17 000,00 €	16 186,95 €	16 186,95 €
22	15	17 500,00 €	17 500,00 €	16 753,49 €	16 753,49 €
23	16	18 000,00 €	18 000,00 €	17 339,86 €	17 339,86 €
24	17	18 500,00 €	18 500,00 €	17 946,76 €	17 946,76 €
25	18	19 000,00 €	19 000,00 €	18 574,89 €	18 574,89 €
26	19	19 500,00 €	19 500,00 €	19 225,01 €	19 225,01 €
27	20	20 000,00 €	20 000,00 €	19 897,89 €	19 897,89 €
28	21	20 500,00 €	20 500,00 €	20 594,31 €	20 594,31 €
29	22	21 000,00 €	21 000,00 €	21 315,12 €	21 315,12 €
30	23	21 500,00 €	21 500,00 €	22 061,14 €	22 061,14 €
31	24	22 000,00 €	22 000,00 €	22 833,28 €	22 833,28 €
32	25	22 500,00 €	22 500,00 €	23 632,45 €	23 632,45 €
33	26	23 000,00 €	23 000,00 €	24 459,59 €	24 459,59 €
34	27	23 500,00 €	23 500,00 €	25 315,67 €	25 315,67 €

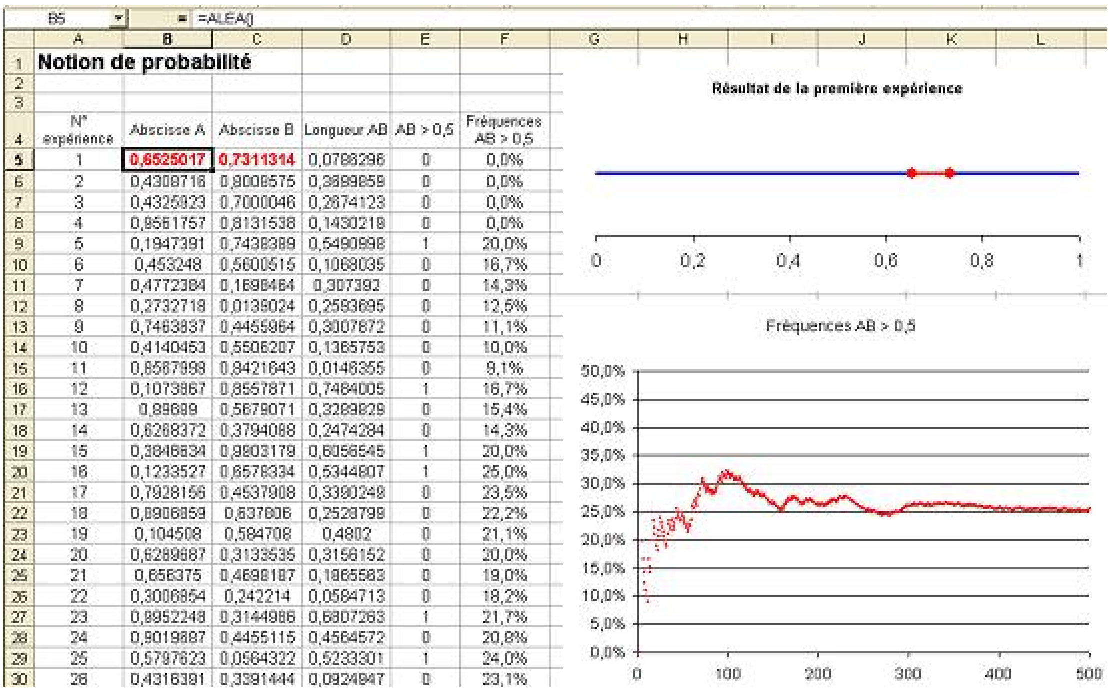


On peut ensuite demander aux élèves de rechercher et d'entrer en C8 et E8 les formules directes, en fonction du rang de l'année, qui conduisent aux mêmes résultats que les formules de récurrence. Ils pourront procéder par essais et rectifications jusqu'à trouver =10000+A8*(C$5*C$7) en C8 et =10000*(1+E$5)^A8 en E8, qui conduisent aux mêmes résultats par recopie.
On étudiera enfin le placement le plus avantageux en fonction de sa durée, avec la possibilité de modifier les taux contenus en C5 et E5.

b – Notion de probabilité

L'approche fréquentiste de la notion de probabilité (loi des grands nombres) est privilégiée par le programme. Le tableur permet de l'expérimenter par simulation.
On considère l'expérience aléatoire consistant à prendre deux points A et B « au hasard » sur un segment de longueur 1. Le tirage d'un point est simulé à l'aide du générateur de nombres pseudo-aléatoires ALEA sur le tableur (random sur la calculatrice).
On s'intéresse à l'événement « $AB > 0,5$ » dont la probabilité n'est pas intuitive.
La simulation de cette expérience est simple à mettre en place.
On entre en B5 et en C5 la formule =ALEA() puis en D5 la formule =ABS(B5-C5) fournit la distance AB.

En entrant en E5 la formule =SI(D5>0,5;1;0) on obtient 1 lorsque l'événement « $AB > 0,5$ » est réalisé et 0 lorsqu'il ne l'est pas.
On sélectionne alors la ligne 5 puis on la recopie vers le bas pour répéter l'expérience.
Les formules =E5/A5 entrée en F5 et =SOMME(E$5:E6)/A6 en F6 puis recopiée vers le bas permettent d'afficher la fréquence (cumulée) observée de l'événement.



B5 = =ALEA()

Notion de probabilité

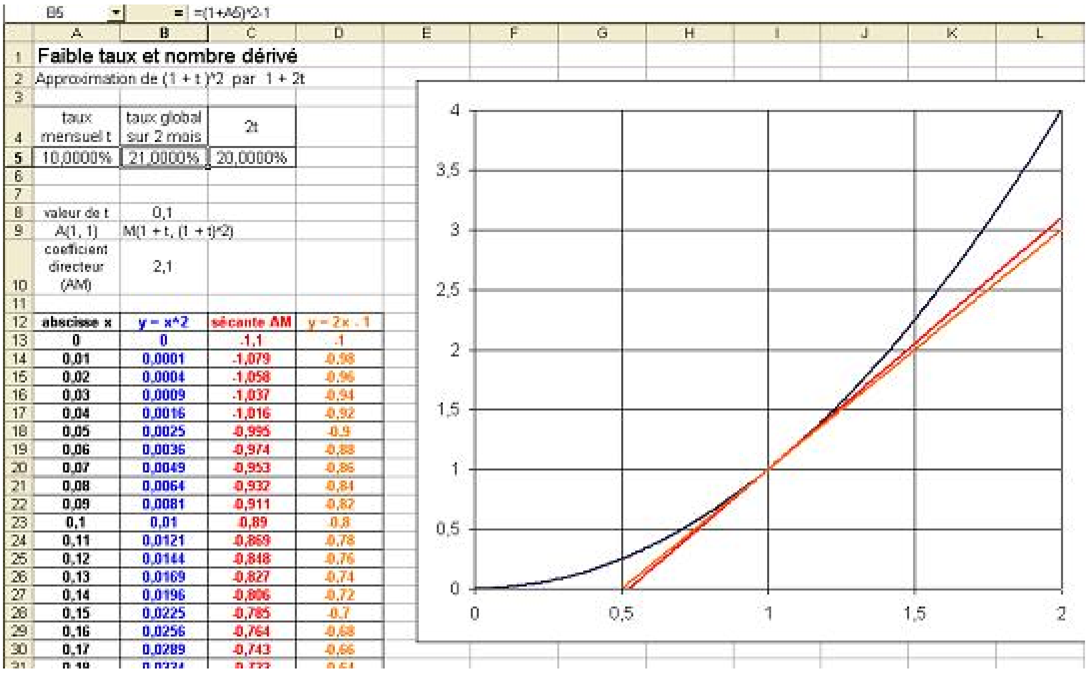
N° expérience	Abscisse A	Abscisse B	Longueur AB	AB > 0,5	Fréquences AB > 0,5
1	0,6525017	0,7311314	0,0786296	0	0,0%
2	0,4308716	0,8008575	0,3699859	0	0,0%
3	0,4325923	0,7000046	0,2674123	0	0,0%
4	0,9561757	0,8131538	0,1430219	0	0,0%
5	0,1947391	0,7438389	0,5490998	1	20,0%
6	0,453248	0,5600515	0,1068035	0	16,7%
7	0,4772384	0,1698464	0,307392	0	14,3%
8	0,2732718	0,0139024	0,2593695	0	12,5%
9	0,7463837	0,4455964	0,3007872	0	11,1%
10	0,4140453	0,5506207	0,1365753	0	10,0%
11	0,8567998	0,8421643	0,0146355	0	9,1%
12	0,1073867	0,8557871	0,7484005	1	16,7%
13	0,89689	0,5679071	0,3289829	0	15,4%
14	0,6268372	0,3794088	0,2474284	0	14,3%
15	0,3846634	0,9903179	0,6056545	1	20,0%
16	0,1233527	0,6578334	0,5344807	1	25,0%
17	0,7928156	0,4537908	0,3390249	0	23,5%
18	0,8906859	0,637806	0,2528799	0	22,2%
19	0,104508	0,584708	0,4802	0	21,1%
20	0,6289687	0,3133535	0,3156152	0	20,0%
21	0,656375	0,4698187	0,1865563	0	19,0%
22	0,3006854	0,242214	0,0584713	0	18,2%
23	0,9952248	0,3144986	0,6807263	1	21,7%
24	0,9019687	0,4455115	0,4564572	0	20,8%
25	0,5797623	0,0564322	0,5233301	1	24,0%
26	0,4316391	0,3391444	0,0924947	0	23,1%

On sélectionne la colonne F puis on demande un graphique en « nuage de points » pour illustrer la stabilisation de la fréquence cumulée (ici sur 500 expériences) vers la probabilité de l'événement.
En appuyant sur la touche F9 on renouvelle les simulations. L'expérience permet alors d'évaluer la probabilité de l'événement à 0,25.

c – Faible taux et nombre dérivé

Les notions d'approximation affine et de nombre dérivé sont évidemment des notions très abstraites, toujours délicates à faire comprendre.
On se place ici dans un contexte économique, celui de la détermination du taux global correspondant à deux augmentations successives de t %. Dans cette situation, l'approximation affine $(1 + t)^2 \approx 1 + 2t$ pour t proche de 0 s'interprète « concrètement » en disant que pour un taux t petit, le taux global vaut environ $2t$.
On peut utiliser le tableur, à la fois pour faire une expérimentation numérique de cette approximation et une illustration graphique (sécante et tangente).
Sur la feuille de calcul suivante, on a entré un taux t en A5 (sur l'image, $t = 0,1 = 10$ %).
Les formules =(1+A5)^2-1 et =2*A5 entrées en B5 et C5 permettent de comparer le taux global exact et le taux global approché. On peut modifier le contenu de la cellule A5 pour expérimenter la qualité de l'approximation.
L'interprétation graphique consiste à considérer les points $A(1, 1)$ et $M(1 + t, (1 + t)^2)$. Le taux global exact est donné par la distance BM où $B(1 + t, 1)$, le point M étant indiqué par la sécante alors que le taux global approché est donné par la distance BC où C est le point de la tangente d'abscisse $1 + t$.
En B8, la formule =A5 reprend la valeur de t.
En B10, la formule =((1+B8)^2-1)/B8 calcule le coefficient directeur de la sécante (AM).

Pour obtenir la parabole, la sécante et la tangente, on a entré en B13 la formule =A13^2 en C13 la formule =B$10*A13+1-B$10 et en D13 la formule =2*A13-1 . La ligne 13 a ensuite été recopiée vers le bas.



abscisse x	y = x^2	sécante AM	y = 2x - 1
0	0	-1,1	-1
0,01	0,0001	-1,079	-0,98
0,02	0,0004	-1,058	-0,96
0,03	0,0009	-1,037	-0,94
0,04	0,0016	-1,016	-0,92
0,05	0,0025	-0,995	-0,9
0,06	0,0036	-0,974	-0,88
0,07	0,0049	-0,953	-0,86
0,08	0,0064	-0,932	-0,84
0,09	0,0081	-0,911	-0,82
0,1	0,01	-0,89	-0,8
0,11	0,0121	-0,869	-0,78
0,12	0,0144	-0,848	-0,76
0,13	0,0169	-0,827	-0,74
0,14	0,0196	-0,806	-0,72
0,15	0,0225	-0,785	-0,7
0,16	0,0256	-0,764	-0,68
0,17	0,0289	-0,743	-0,66

En modifiant le contenu de la cellule A5, on constate que si *t* se rapproche de 0, la sécante se rapproche de la tangente.

4 – Le tableur favorise la « démarche scientifique »

Le programme de STG affirme que :

> « *l'élève doit apprendre à situer et intégrer l'usage des outils informatiques dans une démarche scientifique*»
> et que
> « *le tableur et la calculatrice restent des outils privilégiés pour conjecturer ou vérifier des résultats.* »

Ces derniers exemples illustrent ce que peut être une « démarche scientifique » (modeste) favorisée par le tableur en STG.

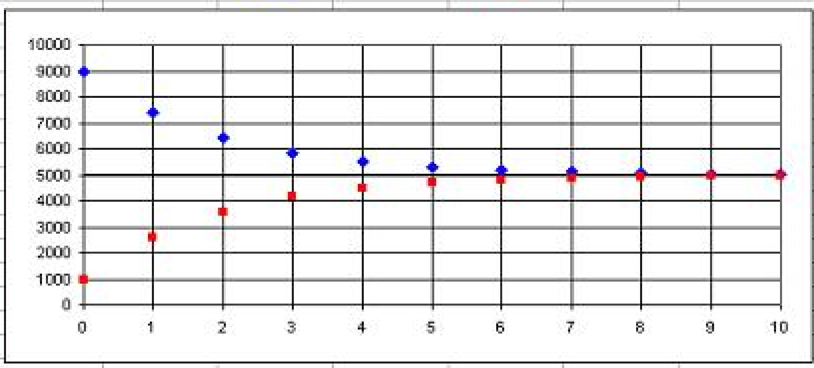
a – Limites de suites - conjectures

La situation suivante permet une conjecture que l'on peut en partie démontrer en STG.
On considère que deux entreprises A et B se partagent une clientèle de 10 000 personnes. Au départ, l'entreprise A compte 9000 clients alors que B possède 1000 clients, mais chaque année 20 % des clients de chaque entreprise changent pour l'entreprise concurrente. Il s'agit d'étudier l'évolution de la clientèle.
Il est facile d'organiser les calculs sur le tableur.
Sur l'image suivante, on entré en B7 la formule =C6*0,2 et en D7 la formule =E6*0,2 .
Le nombre de clients de A l'année 1 est donné en C7 par la formule =C6-B7+D7 et celui de B en E7 par la formule =E6-D7+B7 .
Il suffit de sélectionner la ligne 7 puis de la recopier vers le bas.
Le graphique (et les valeurs numériques) permettent la conjecture : la clientèle de chaque entreprise se rapproche de 5000.
Si l'on considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 5000$ où a_n est le nombre de clients de l'entreprise A (cette suite s'interprète comme la distance entre le point correspondant à a_n et la droite d'équation $y = 5000$), on peut faire constater en calculant les quotients successifs (c'est

une question à poser) que l'on a affaire à une suite géométrique de raison 0,6 (sans le démontrer).

B7 =C6*0,2

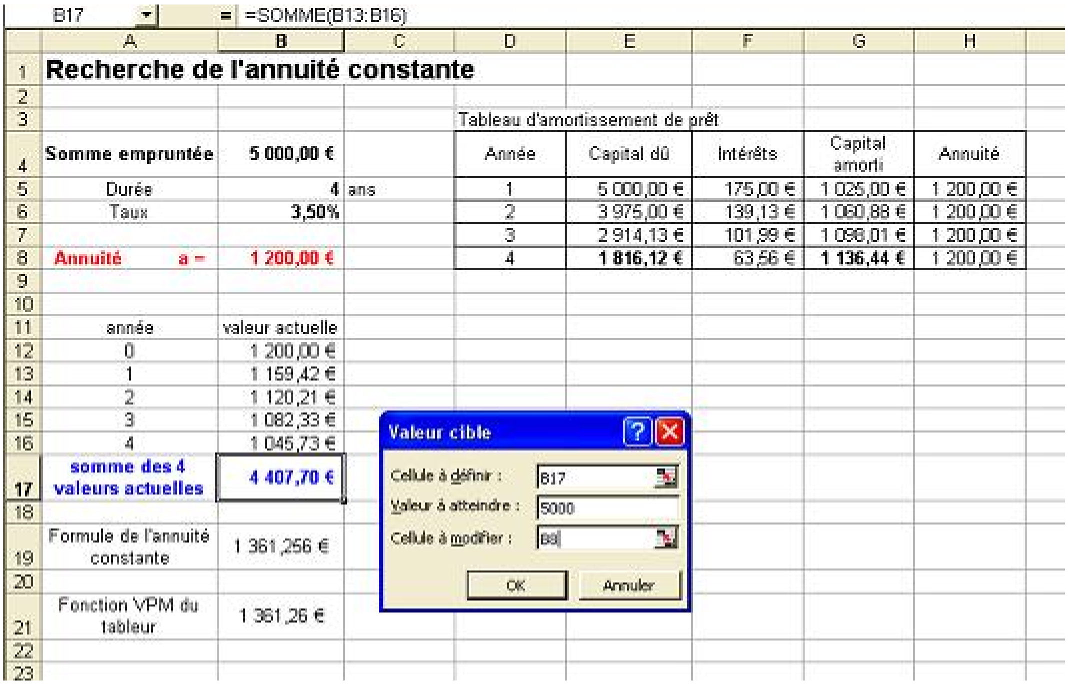
	A	B	C	D	E	F	G
1	**Limites de suites - conjectures**						
2	Chaque année 20% des clients de A rejoignent B et 20% des clients de B rejoignent A						
3	Etude de la suite u(n) : nature et limite						
4							
5	Rang de l'année n	Nombre de clients quittant A	**Nombre de clients A a(n)**	Nombre de clients quittant B	**Nombre de clients B b(n)**	u(n) = a(n) - 5000	quotients des termes consécutifs de u
6	0		**9000**		**1000**	4000	
7	1	1800	**7400**	200	**2600**	2400	0,6
8	2	1480	**6440**	520	**3560**	1440	0,6
9	3	1288	**5864**	712	**4136**	864	0,6
10	4	1173	**5518**	827	**4482**	518	0,6
11	5	1104	**5311**	896	**4689**	311	0,6
12	6	1062	**5187**	938	**4813**	187	0,6
13	7	1037	**5112**	963	**4888**	112	0,6
14	8	1022	**5067**	978	**4933**	67	0,6
15	9	1013	**5040**	987	**4960**	40	0,6
16	10	1008	**5024**	992	**4976**	24	0,6



On sait dans le cours qu'une suite géométrique de raison 0,6 a pour limite 0.
Tout n'est pas démontré mais on a tout de même dans cet exemple, une conjecture et un début de démarche scientifique pour la conforter.

b – Recherche de l'annuité constante

Lorsqu'on emprunte une somme (ici 5000 €) à un taux fixe (ici 3,5 %) sur une période donnée (ici 4 ans), le calcul de l'annuité constante, c'est-à-dire la somme constante que l'on va rembourser chaque année, correspond à un calcul compliqué qui, en gestion, est résolu par l'utilisation d'une formule magique, d'une fonction particulière du tableur, ou la lecture d'une table.
On propose ici une méthode finalement scientifique, consistant à partir d'une valeur (très) approximative que l'on sait être fausse, pour l'ajuster ensuite afin d'obtenir ce que l'on désire.
Sur l'image d'écran suivante, on est parti d'une annuité de 1200 € et on a établi le tableau d'amortissement « classique » du prêt.
Ce tableau est évidemment faux puisque le capital restant dû la dernière année n'est pas amorti par l'annuité.
Pour que cela « colle », il faut que la somme des valeurs actuelles (c'est-à-dire actualisées au taux de 3,5 %) des annuités fasse 5000 €.
Il s'agit de faire la somme des termes d'une suite géométrique.
En B12, la formule =B8 reprend la valeur de l'annuité (ici 1200 €).
En B13, la formule =B12*(1+B$6)^-1 calcule la valeur actuelle de la première annuité, versée dans un an. On recopie ensuite cette formule jusqu'en B16 pour obtenir la suite des valeurs actuelles.
En B17 on fait la somme =SOMME(B13:B16) .



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Recherche de l'annuité constante**							
2								
3				Tableau d'amortissement de prêt				
4	**Somme empruntée**	**5 000,00 €**		Année	Capital dû	Intérêts	Capital amorti	Annuité
5	Durée	**4**	ans	1	5 000,00 €	175,00 €	1 025,00 €	1 200,00 €
6	Taux	**3,50%**		2	3 975,00 €	139,13 €	1 060,88 €	1 200,00 €
7				3	2 914,13 €	101,99 €	1 098,01 €	1 200,00 €
8	**Annuité a =**	**1 200,00 €**		4	**1 816,12 €**	63,56 €	**1 136,44 €**	1 200,00 €
9								
10								
11	année	valeur actuelle						
12	0	1 200,00 €						
13	1	1 159,42 €						
14	2	1 120,21 €						
15	3	1 082,33 €						
16	4	1 045,73 €						
17	**somme des 4 valeurs actuelles**	**4 407,70 €**						
18								
19	Formule de l'annuité constante	1 361,256 €						
20								
21	Fonction VPM du tableur	1 361,26 €						
22								
23								

Il suffit ensuite d'ajuster la valeur de l'annuité (contenue en B8) de sorte que la somme calculée en B17 soit égale à 5000 €. Cela peut se faire en faisant appel à « Valeur cible » qui est un solveur très simple d'utilisation accessible par le menu « Outils ».
La solution trouvée est une annuité fixe de 1361,26 €. On constatera que le tableau d'amortissement « tombe juste ».
On peut comparer cette solution au même résultat donné par la formule mathématique directe (sans doute bien compliquée à justifier en STG) calculée en B19 par la formule =5000*B6/(1-(1+B6)^-4) ou à la formule financière du tableur entrée en B21 =-VPM(B6;4;5000) .