Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Créteil

Mercredi 15 mars 2023

Exercices académiques

Par équipes

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Chaque équipe traite les deux exercices et rend une copie commune.
Les échanges entre membres d'une même équipe sont autorisés, sans pour autant gêner le travail des autres équipes.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux équipes qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'elles ont pu prendre.

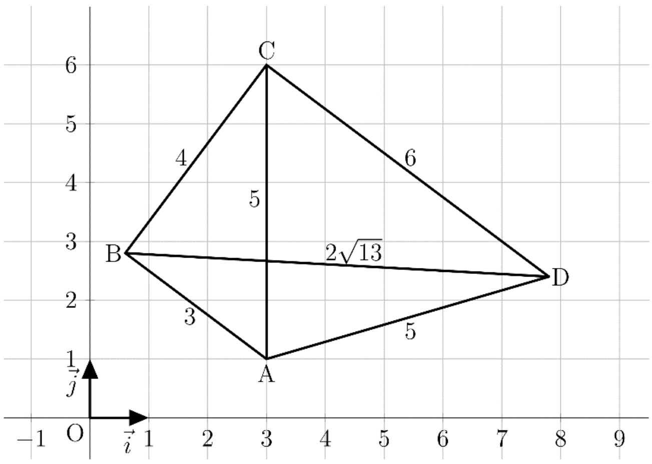
Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur leur copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent leur composition.

Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice académique 1

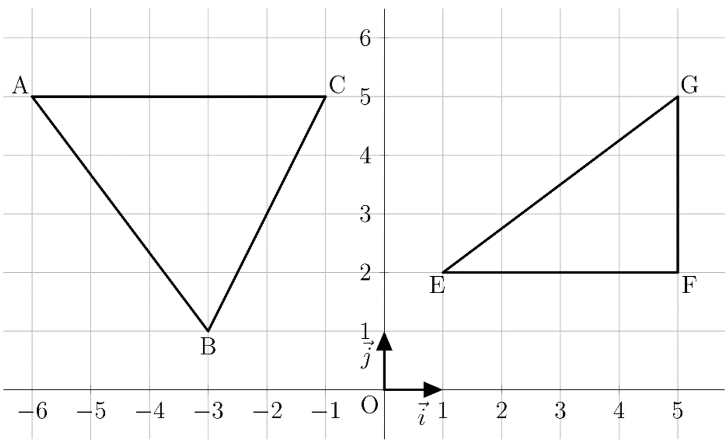
PARTIES INTEGRALES DU PLAN

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide de points du plan.
On dit que $\mathcal{E}$ est une partie intégrale du plan si la distance entre deux points quelconques de $\mathcal{E}$ est un nombre entier.
Ainsi, sur la figure suivante, si on considère les points A, B, C et D du plan tels que
$AB = 3 ; AC = 5 ; BC = 4 ; CD = 6 ; AD = 5 ; BD = 2\sqrt{13}$
On peut dire par exemple que :
- les ensembles {A}, {A ; B}, {B ; C} et {A ; B ; C} sont des parties intégrales du plan.
- Les ensembles {B ; D}, {A ; B ; D} et {A ; B ; C ; D} ne sont pas des parties intégrales du plan.



Partie A

1. On considère les points A, B, C, D, E, F et G du plan, tous à coordonnées entières.



a. L'ensemble {A ; B ; C} est-il une partie intégrale du plan ?
b. Même question avec l'ensemble {E ; F ; G}.
2. L'ensemble constitué par les sommets d'un rectangle peut-il être une partie intégrale du plan ?
3. Même question avec l'ensemble constitué par les sommets d'un carré.

4. Représenter 5 points qui forment une partie intégrale du plan.
5. On considère un entier naturel $n \geq 2$.
a. Montrer que quel que soit l'entier n choisi, il est possible de trouver un ensemble de n points du plan qui soit une partie intégrale du plan.
b. Montrer que quel que soit l'entier n choisi, il est possible de trouver un ensemble $\mathcal{F}$ de n points vérifiant les 3 conditions suivantes :
- Les n points sont alignés.
- L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas une partie intégrale du plan.
- Aucun sous-ensemble de $\mathcal{F}$ n'est une partie intégrale du plan.

Partie B
On considère maintenant un entier naturel $n \geq 3$.
Le but de la partie B est de montrer que quel que soit l'entier $n \geq 3$ choisi, il est possible de trouver un ensemble G de n points du plan vérifiant les deux conditions suivantes :
- L'ensemble G est une partie intégrale du plan.
- Aucun triplet de G n'est constitué de 3 points alignés.

Pour parvenir à ce résultat, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
(On rappelle qu'un point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$)

1. Soit t un nombre entier et A le point de coordonnées $(-1\,;0)$.
On note $\mathcal{D}_t$ la droite passant par A et de coefficient directeur t.
a. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_t$.
b. Soit M le point de coordonnées $(x\,;y)$
Montrer que le point M appartient à la fois à la droite $\mathcal{D}_t$ et au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient :

$$\begin{cases}(x+1)[(t^2+1)x+t^2-1]=0\\ y=tx+t\end{cases}$$

c. Montrer que la droite $\mathcal{D}_t$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, le point A et un autre point dont on déterminera les coordonnées en fonction de t.
d. En déduire qu'il existe une infinité de couples $(a\,;b)$ où a et b sont des nombres rationnels et $a^2 + b^2 = 1$.
2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(a^2 - b^2\,;2ab)$ où a et b sont deux rationnels tels que $a^2 + b^2 = 1$.
a. Montrer que si $M \in \mathcal{P}$ alors $M \in \mathcal{C}$.
b. Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.
On considère les points M et N du plan respectivement de coordonnées $(a^2 - b^2\,;2ab)$ et $N(c^2 - d^2\,;2cd)$.
Montrer que si $M = N$ alors $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$.
c. Conclure que $\mathcal{P}$ est une partie du cercle $\mathcal{C}$ contenant un nombre infini de points.
3.
a. Soit $M(x_M;y_M)$ et $N(x_N;y_N)$ deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Montrer que

$$MN^2 = 2\big(1-(x_Mx_N+y_My_N)\big)$$

Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.
En développant l'expression $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, montrer que :

$$1 - a^2c^2 - b^2d^2 = a^2d^2 + b^2c^2.$$

b. Déduire des questions précédentes que, si M et N sont deux points de $\mathcal{P}$, alors la distance MN est un nombre rationnel.

4. Déduire des questions précédentes que quel que soit l'entier $n \geq 3$ choisi, il est possible de trouver un ensemble G de n points du plan vérifiant les deux conditions suivantes :

- L'ensemble G est une partie intégrale du plan.
- Aucun triplet de G n'est constitué de 3 points alignés.

Exercice académique 2

LES TRIPLETS HERONIENS

On considère trois points A, B et C du plan P.
On note :
$a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$ les longueurs des côtés du triangle ABC.
s le demi-périmètre du triangle ABC et
$\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

On dira que **le triangle ABC est « héronien »** si les longueurs a, b, c de ses côtés et son aire $\mathcal{A}$ sont des nombres entiers.
On dira aussi, dans ce cas, que **le triplet $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ est héronien.**

Le but de ce problème est d'étudier des exemples de triplets héroniens bien particuliers.

Partie A - Un exemple de triplets héroniens

Dans cette partie on s'intéresse au triangle ABC tel que $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$.
1. Construire un tel triangle.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Montrer que le triplet $(3,4,5)$ est héronien.

Partie B - Un triplet héronien ?

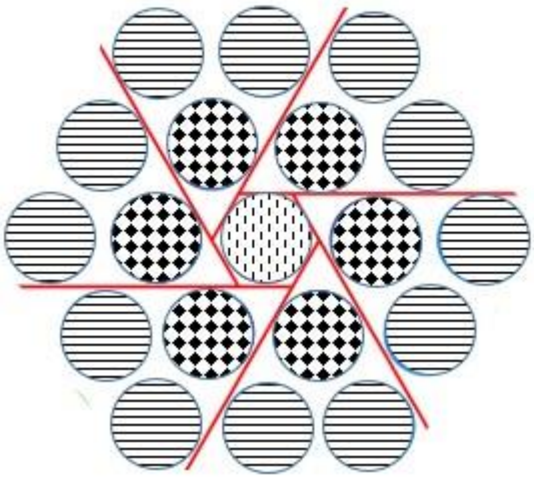
Dans cette partie, on s'intéresse au triangle ABC tel que $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$.
On note H le pied de la hauteur issue de B, x la longueur AH et y la longueur HC.
1. Montrer, en utilisant deux fois le théorème de Pythagore, que $x^2 - y^2 = 24$.
2. En déduire que $x - y = 4$.
3. Calculer BH.
4. Le triplet $(5,6,7)$ est-il héronien ?

Partie C - Un triangle héronien dont l'aire est un nombre sphénique

Les nombres sphéniques :
Ce sont les entiers naturels qui sont le produit de trois nombres premiers distincts.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $1 + 2 + 3 + \cdots \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.
1. Les nombres sphéniques :
a. Déterminer les quatre plus petits multiples de dix qui soient des nombres sphériques.
b. Déterminer le plus petit nombre sphénique supérieur à 111.

2. Les nombres hexagonaux centrés :

On considère la figure ci-dessous, constituée de trois couches de points successives : la couche 1 est constitué du point central représenté par des tirets verticaux, la couche 2 est constitué des points aux hachures damiers et la couche 3 est constituée des points aux hachures horizontales.



Le nombre hexagonal h_1 est le nombre de points de la couche 1, ainsi $h_1 = 1$.
Le nombre hexagonal h_2 est le nombre de points contenus dans la figure constituée des deux premières couches, c'est-à-dire la somme du nombre des points constituant la couche 1 (tirets verticaux) et la couche 2 (hachures damiers).
Ainsi $h_2 = 7$
Soit n un entier naturel, on note h_n le nombre de points contenus dans la figure constituée de tous les points disposés en n couches successives.
La figure ci-dessus représente la configuration du nombre h_3.

a. Déterminer h_3 et h_4.

b. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $h_n = 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$

3. Un triplet héronien dont l'aire est un nombre sphénique :

On pose maintenant $x = h_3$ et $z = h_4$ et on cherche un nombre entier y compris entre x et z tel que le triplet $(x; y; z)$ soit héronien et d'aire 114.

On admettra la formule de Héron :

Soit un triangle ABC de côtés a, b et c.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et s le demi-périmètre du triangle
$\mathcal{A}$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a. Montrer que le nombre y vérifie l'égalité

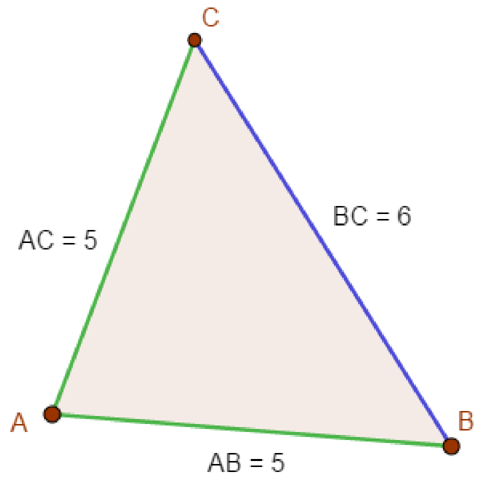
$$(56^2 - y^2)(y^2 - 18^2) = 16 \times 12\,996.$$

b. Montrer alors que y vérifie l'égalité $(y^2 - 400)(y^2 - 3060) = 0$.

c. Conclure.

Partie D – Recherche de triangles isocèles formant des triplets héroniens

1. Montrer que le triangle isocèle dont les côtés sont de longueurs 5, 5 et 6 représenté ci-dessous est héronien.



2. Êtes-vous en mesure de trouver un autre triangle à la fois isocèle et héronien ?
(Les triangles semblables dont les longueurs des côtés seraient proportionnelles au précédent comme $(10\,;10\,;12)$ par exemple ne seront pas pris en compte).