Éléments de réponses aux exercices académiques des olympiades de mathématiques de 2016

Académie de Créteil

Exercice 1 :

I] Aire d'un pentagone régulier :

1. Dans la configuration de Thalès formée des triangles FBC et FAD, on a :

$$\frac{d}{d+c} = \frac{c}{d} \text{ ou encore } \frac{d+c}{d} = \frac{d}{c} \text{ ce qui donne bien } \frac{d}{c} = 1 + \frac{c}{d}.$$

2. On pose $\phi = \frac{d}{c}$.

a) D'après la question 1. $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ ce qui donne $\phi^2 = \phi + 1$ et ainsi $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

b) L'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ admet deus solutions de signes contraires. ϕ étant positif, la seule solution possible est $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Aire(ABCDE) = 2xaire(BCD) + aire(ABD).

$Aire(BCD) = \frac{1}{2} d\sqrt{c^2 - \frac{d^2}{4}}$ et $aire(ABD) = \frac{1}{2} c\sqrt{d^2 - \frac{c^2}{4}}$.

Donc : $aire(ABCDE) = d\sqrt{c^2 - \frac{d^2}{4}} + \frac{1}{2} c\sqrt{d^2 - \frac{c^2}{4}}$

$$= \frac{1}{2} c\phi\sqrt{4c^2 - c^2\phi^2} + \frac{1}{4} c\sqrt{4c^2\phi^2 - c^2}$$

$$= \frac{c^2}{4}\left(2\phi\sqrt{4 - \phi^2} + \sqrt{4\phi^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{c^2}{4}\left(2\phi\sqrt{4 - (\phi + 1)} + \sqrt{4(\phi + 1) - 1}\right)$$

$$= \frac{c^2}{4}\left(2\phi\sqrt{3 - \phi} + \sqrt{4\phi + 3}\right)$$

II] Aire d'un hexagone :

Le triangle OAB est équilatéral.

$aire(ABCDEF) = 6 \times aire(OAB) = 6 \times \frac{1}{2} c\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$.

III] Le ballon de foot :

Calculons un encadrement de c sachant que la circonférence du ballon doit mesurer entre 68 cm et 70 cm. On a donc $68 \leq 2\pi r \leq 70$ où r est le rayon du ballon.

On a : $surface(Ballon) = 4\pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{\pi}$,

et $surface(Ballon) \approx 12 \times \frac{c^2}{4}\left(2\phi\sqrt{3 - \phi} + \sqrt{4\phi + 3}\right) + 20 \times \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$

$$= c^2\left(6\phi\sqrt{3 - \phi} + 3\sqrt{4\phi + 3} + 30 \times \sqrt{3}\right)$$

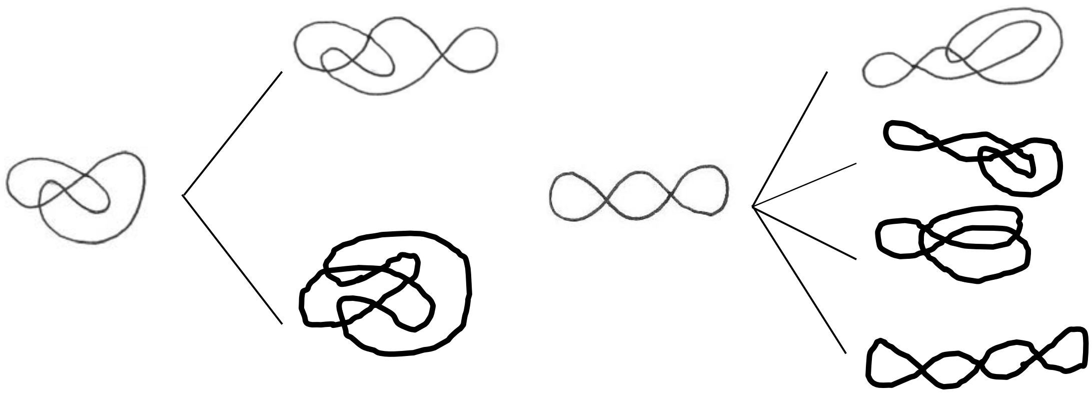
Sachant que $\frac{68^2}{\pi} \leq surface(ballon) \leq \frac{70^2}{\pi}$ on en déduit que $4{,}5 \leq c \leq 4{,}7$.

La couture du ballon nécessite de coudre une longueur totale égale à $90c$, ce qui correspond bien à une longueur supérieure à 4 mètres.

Exercice 2 :

Partie A

1. La figure c) est composée de 4 nœuds, une boucle, 7 arcs et 5 régions.
2.



3. a)

Nombre de rabattements R	Nombre de torsions T	c	r	a
1	0	3	4	6
0	1	2	3	4
2	3	8	9	16
p	q	1+2p+q	2+2p+q	2+4p+2q

b) D'une étape n à l'étape n+1, l'action de R donne $\begin{cases} c_{n+1} = c_n + 2 \\ r_{n+1} = r_n + 2 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$ et l'action de T donne $\begin{cases} c_{n+1} = c_n + 1 \\ r_{n+1} = r_n + 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$ avec $c_0 = 1$, $r_0 = 2$ et $a_0 = 2$.

4. D'après la dernière ligne du tableau du 3.a), pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a :

$$c + r - a = 1.$$

Partie B :

1. $\begin{cases} c" = c + c' \\ r" = r + r' - 1 \\ a" = a + a' \end{cases}$
2. On note $(c_p\ ;\ r_p\ ;\ a_p)$ le triplet associé à X^p avec $c_1 = c$, $r_1 = r$ et $a_1 = a$.

   D'après la question précédente, on a : $\begin{cases} c_p = c + c_{p-1} \\ r_p = r + r_{p-1} - 1. \\ a_p = a + a_{p-1} \end{cases}$

   On en déduit que $\begin{cases} c_p = c + (p-1)c = pc \\ r_p = r + (p-1)(r-1) = p(r-1) + 1 \\ a_p = a + (p-1)a = pa \end{cases}$
3. Le nombre de nœuds de $((X^{16})^9)^7$ est donné par $16 \times 9 \times 7c = 2016$, donc $c = 2$.

   Un représentant de X est  .
4. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que le nombre de nœuds de X^p soit 2017 avec $2 \leq p \leq 2016$. D'après la question B.2. on a $pc = 2017$. Or 2017 est un nombre premier, un tel nombre p ne peut exister.
5. Soit $X \in \mathcal{C}$ composé de n nœuds. D'après la question A. 3.a) le nombre de régions est donné par $r = n + 1$.

   Puisqu'il y a plus de régions que de nœuds, il existe au moins deux régions qui contiennent le même nombre de nœuds à leurs périphéries. (Par l'absurde)