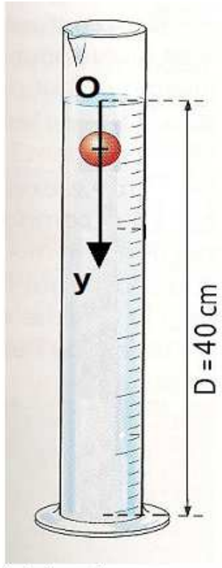

Schéma de l'expérience du lâché de plomb dans du glycérol.

Le glycérol est un fluide très visqueux. La viscosité d'un fluide correspond à sa facilité à réagir au mouvement. Un fluide qui réagit moins vite qu'un second est dit plus visqueux. Ainsi, plus le fluide est visqueux, plus il s'opposera à une déformation imposée par un objet en mouvement dans celui ci. Par conséquent la force de frottement fluide est d'autant plus forte que le fluide est visqueux. La norme de la force de frottement exercée par le glycérol sur la bille en mouvement à la vitesse $||\vec{v}|| = v$ est modélisée par $||\vec{f}|| = -\lambda v$ avec $\lambda = 0,4$ kg/s .

Dans le cas de cette expérience, on utilise une bille sphérique de masse $M = 0,1$ kg, de volume $V_{bille} = 13$ mL.
La bille est lâchée sans vitesse initiale à une hauteur $h = 40cm$ dans une éprouvette remplie de glycérol dont la masse volumique est $\rho_g = 1,26g/cm^3$.

Partie A : Présentation de la situation physique : modélisation.

1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la bille en train de chuter dans le glycérol.
2. Le mouvement est purement unidimensionnel.
   Montrez que l'équation du mouvement du plomb dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen s'écrit :

$$M\frac{dv}{dt} = (M - V_{bille} \times \rho_g)g - \lambda v$$

   On appelle "**régime transitoire**", la période pendant laquelle la vitesse du plomb évolue. Lorsque la régime transitoire se termine, commence le régime stationnaire qui dure jusqu'à ce que le plomb touche le fond de l'éprouvette.

3. (a) Comment s'écrit l'équation différentielle pendant le régime stationnaire ?
   (b) Exprimer alors la vitesse en régime stationnaire en fonction de M, V_{bille}, λ, ρ_g et g. Cette valeur de la vitesse est appelée "**vitesse limite**" et est notée v_{lim} .
   (c) A l'aide des données de l'exercice, donner en m/s cette vitesse limite.

Partie B : Traitement mathématiques de la deuxième loi de Newton.

I) Utilisation d'une suite (V_n).

La résolution des équations différentielles n'est pas au programme du lycée.
Nous vous proposons donc une résolution approchée à l'aide de suites numériques réelles.
Pour cela, on définit la suite (V_n) comme la suite des vitesses atteintes par la bille au temps $t = n\times\Delta_t$.
L'intervalle de temps Δ_t est suffisamment petit pour confondre le taux d'accroissement et sa limite la dérivée.
La deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$M\frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta_t} = (M - V_{bille} \times \rho_g)g - \lambda v$$

1. Donner V_0, valeur initiale de la vitesse et premier terme de la suite (V_n).
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = aV_n + b$ où a et b sont deux réels.
   Donner les expressions de a et de b en fonction de M, V_{bille}, λ, ρ_g, g et Δ_t.

3. Pour toute la suite de l'exercice, nous prendrons $\Delta_t = 40$ ms ; ce qui correspond au temps entre deux images au cinéma.
   (a) Donner les unités des réels a et b.
   (b) Montrer qu'avec les données de l'exercice, $a = 0,84$ et $b = 0,0133$.

II) Étude graphique de la suite (V_n).

A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer les variations de la suite (V_n)ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.
Expliquer votre démarche.

III) Étude la suite (V_n) à l'aide d'une suite auxiliaire (U_n).

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = V_n - 0,083125$.

1. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression de (U_n) en fonction de n puis celle (V_n) en fonction de n.
3. Quelle est la limite de la suite (V_n) ?
   Quel lien semble-t-il y avoir avec la vitesse limite ?