|  |
| --- |
| Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des lycées et universités de l’académie de Créteil.  Titre : Fonctions logarithmes et applications.  Disciplines : Mathématiques, Physique – Chimie.  Objectifs :   * Introduire la fonction logarithme décimal. * Appliquer les résultats obtenus dans pour le calcul de grandeurs.   Mise en place :  Une ou deux séance(s) de TD + travail à la maison : Traiter les exercices 1 et 2 en une séance de TD, puis donner un des exercices 3 à 5 en devoir à la maison. Les exercices 6 et 7 peuvent être traités lors d’une seconde séance de TD portant sur les logarithmes en base quelconque.  Les séances et devoirs à la maison peuvent être effectués en binôme.  Contenu :  Exercices d’introduction de la fonction logarithme décimal et des fonctions logarithmes en base quelconque et exercices d’application pour le calcul de pH, d’intensité sonore ou d’atténuation d’un signal.  Prérequis :   * Les enseignants d’une discipline autre que les Mathématiques peuvent utiliser les exercices 3 à 5, et dans le cas où la fonction logarithme décimal ne serait pas encore traitée par les élèves, les prérequis suivants peuvent être fournis aux élèves :   *Prérequis de mathématiques :*   * *Pour tout réel strictement positif,* . * *Pour tous réels et avec ,  ;* * *Pour tous réels et strictement positifs, on a :*   et .   * Les enseignants d’une discipline autre que la Physique – Chimie souhaitant utiliser l’exercice 5, le prérequis suivant peut-être fourni aux élèves n’ayant pas encore étudié l’intensité sonore :   *Prérequis de physique :*  *Lorsque plusieurs sons sont émis en même temps, l’intensité du son perçu est égale à la somme des intensités des sons émis.* |

|  |
| --- |
| **Exercices de mathématiques introduisant la fonction logarithme décimal** |

**Exercice n°1 :** Découverte de la fonction

1. Préambule : Soit un entier naturel, simplifier .

Le but de cet exercice est de déterminer s’il existe une fonction  telle que :

1. est définie sur  et proportionnelle à la fonction  ;
2. Pour tout entier naturel *,* .
3. Conjecture à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique :
4. On suppose que cette fonction existe. Donner les valeurs de , , et . En déduire des points par lesquels passe la courbe de dans un repère orthogonal.
5. À l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique, énoncer une conjecture sur l’existence et la valeur du coefficient de proportionnalité entre et ln. On pourra utiliser un repère orthogonal dans lequel les abscisses varient de 0 à 100.
6. Démonstration de la conjecture :
7. En utilisant la valeur de , déterminer le coefficient de proportionnalité entre les fonctions et ln. Ce résultat est-il cohérent avec la conjecture énoncée à la question précédente ?
8. Montrer qu’alors la propriété (ii) est bien vérifiée.

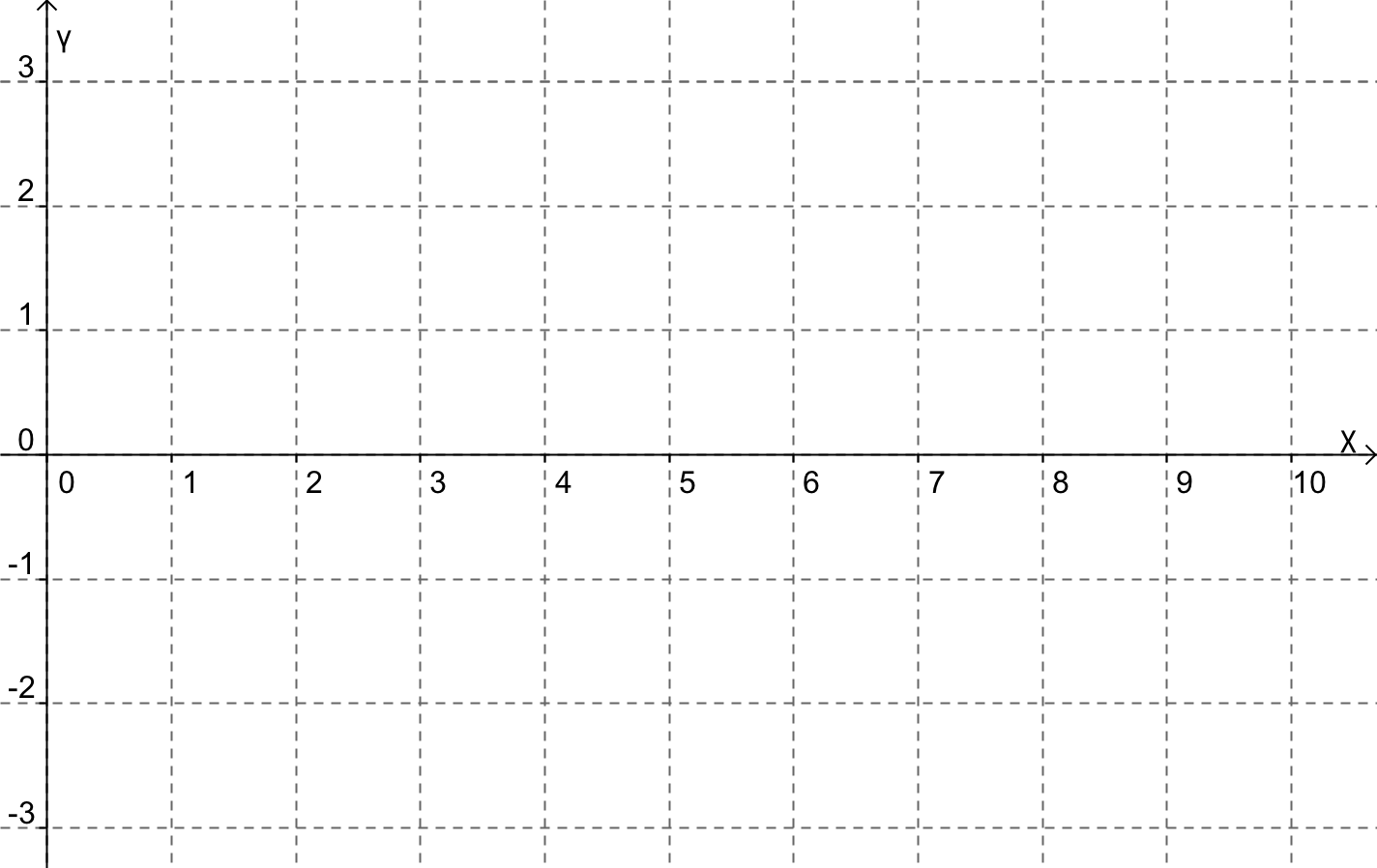
Cette fonction est appelée *logarithme décimal*, elle est notée .

**Exercice n°2 :** Etude de la fonction log

On définit la fonction log sur par .

1. Donner le sens de variation que la fonction et calculer ses limites en 0 et .
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous par des valeurs arrondies au dixième, puis tracer les courbes représentatives des fonctions ln et log dans le repère ci-dessous.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |



1. Démontrer que pour tous réels et strictement positifs, on a :

, et .

|  |
| --- |
| **Exercices utilisant la fonction logarithme décimal** |

**Exercice n°3** : Calcul du pH d’une solution aqueuse

Le pH d’une solution aqueuse est défini par la relation où désigne la concentration en ions , exprimée en .

1. Calculer le pH correspondant à une concentration .
2. Calculer la concentration en ions d’une solution neutre de pH égal à 7.
3. On admet que le pH d’une solution est compris entre 6,95 et 7,05. Déterminer un encadrement de .
4. Exprimer la concentration en fonction du pH. Le pH est une échelle qui permet de mesurer l’activité chimique d’ions hydrogènes d’une solution. Quel est l’avantage d’utiliser les puissances de 10 décrivant la concentration plutôt que la concentration elle-même ?
5. Comment varie le pH quand la concentration en ions augmente ? quand la concentration est multipliée par 10 ? par 100 ? par  ?
6. Que devient la concentration en ions quand le pH augmente de 1 ? de 2 ? de  ?

**Exercice n°4** : Intensité sonore et niveau d’intensité sonore

L’**intensité sonore** est une grandeur qui représente la « puissance » d’un son, elle s’exprime en . L’intensité sonore à partir de laquelle un son est audible pour un homme est . Pour manipuler des valeurs plus pratiques, on définit le **niveau d’intensité sonore** , exprimé en décibels, par la relation :

où est l’intensité sonore.

1. Calculer le niveau d’intensité sonore de .
2. Un son devient douloureux à partir de 130 décibels. Déterminer l’intensité sonore correspondante.
3. Lorsque l’intensité sonore d’un bruit est doublée, déterminer de combien augmente le niveau d’intensité sonore.
4. On considère une sirène d’alerte qui émet un son de 110 dB à 1 m de l’émetteur.
5. Calculer l’intensité du son émis par la sirène à 1 m.
6. Combien de telles sirènes, placés à 1 m du récepteur, doivent émettre un son en même temps pour le niveau d’intensité sonore atteigne le seuil de douleur ?

**Exercice n°5** : Atténuation d'un signal lors de sa transmission

La puissance d'un signal transmis par un canal décroit avec la distance qu'il parcourt. On note la puissance d'entrée du signal et sa puissance de sortie, exprimées en watts. **L’atténuation**  du signal est définie par

Le **coefficient d’affaiblissement linéique**  caractérise cette décroissance. Il s'exprime en .

|  |
| --- |
| Il est défini par la relation avec la longueur de la fibre en mètres. |

*Prérequis de mathématiques :*

* *Pour tous réels et avec , .*

1. Justifier que la grandeur est un nombre réel strictement positif.
2. Sur une ligne de 10 km on constate une perte de puissance de 15 % lors du transfert.
3. Montrer que l’atténuation est .
4. En déduire le coefficient d’affaiblissement linéique de cette ligne.
5. L'atténuation d'un câble coaxial est de 10,3 dB sur 100 m. Calculer le pourcentage de puissance perdue lors du transfert.

|  |
| --- |
| **Exercices de mathématiques sur les fonctions logarithme en base** |

**Exercice n°6 :** Les fonctions logarithmes

Dans cet exercice, le nombre est un réel strictement supérieur à 1.

On définit le logarithme en base de le nombre *y* tel que . Ce nombre est noté .

Exemples : donc  ; donc .

1. Déterminer les valeurs de et .
2. À partir de la relation , montrer que .

*Le logarithme en base de est défini par la formule .*

**Exercice n°7 :** Sécurité des mots de passe

On appelle **alphabet** l’ensemble des caractères utilisés pour écrire un mot de passe. Dans cet exercice, on utilise comme alphabet les 26 lettres minuscules et majuscules de l’alphabet latin sans signe diacritique (accents, points, …) et les 10 chiffres du système de numération décimale.

La **longueur** d’un mot de passe est le nombre de caractères qui le composent.

1. Combien de caractères différents sont disponibles dans cet alphabet ?
2. Dans cet alphabet, quel est nombre de mots de passe de longueur 2 possibles ?

2 ;  ; .

1. Déterminer le nombre de mots de passe de longueur 5, puis, pour un entier naturel non nul, exprimer le nombre de mots de passe de longueur .
2. Jean sécurise sa boîte mail avec un mot de passe. Un matin il dit à son amie Nathalie qu’il utilise un mot de passe de longueur 8. Elle lui affirme en retour qu’elle est capable de pirater sa boîte mail avant le lendemain.
3. Sachant que l’ordinateur de Nathalie est capable de tester (trois mille millions) mots de passe par seconde, justifier que Nathalie a raison.
4. Le lendemain, devant l’abattement de Jean, Nathalie lui affirme que s’il avait rajouté un caractère à son mot de passe elle n’aurait pas eu la patience de pirater sa boîte mail. Expliquer cette affirmation.
5. Désormais, on note la longueur d’un mot de passe et le nombre de mots de passe de longueur .
6. Parmi les relations suivantes, déterminer celles qui sont vraies.

 ;  ;

 ;  ; .

1. Montrer de deux façons différentes que si on augmente de 1 le nombre de caractères alors on multiplie par 62 le nombre de mots de passe.
2. Déterminer la plus petite longueur de mot de passe à choisir pour qu’il y ait au moins un trillion (soit , dénommé encore milliard de milliards) de mots de passe différents.