Équations Fonctionnelles
Quelques Équations Fonctionnelles Classiques

Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des lycées et universités de l'académie de Créteil.

Objectifs :

- ▷ Introduire par l'exemple la notion d'équations fonctionnelles ;
- ▷ Utiliser une équation fonctionnelle afin de déterminer les propriétés de ses solutions [Analyse d'une équation fonctionnelle] ;
- ▷ Caractériser l'ensemble des solutions d'une équation fonctionnelle (présentant un peu de régularité).

Mise en place : Une séance de 2h + le reste en travail à la maison. Les élèves peuvent travailler en groupe ; l'aval du professeur peut être utile pour valider chacune des étapes.

Contenu : Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. On étudie trois équations fonctionnelles classiques :

Section 1. Trouver f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Section 2. Trouver f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Section 3. Trouver f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x \times y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

L'étudiant manipulera la définition du nombre dérivé et caractérisera l'ensemble des solutions (dérivable) des précédentes équations.

---

1 L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

Le but de cette section est de trouver des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Quelques solutions "particulières"
   (a) Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des solutions à l'équation fonctionnelle (1).
   (b) Montrer que si f est une fonction constante qui est une solution de l'équation fonctionnelle (1) alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si f vérifie l'équation fonctionnelle (1), alors $f(0) = 0$.
3. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et on suppose de plus que f est continue en 0, *i.e.* :
$$\lim_{h \to 0} f(h) = f(0).$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, *i.e.* pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Indication. On pourra utiliser l'équation (1) *afin de réécrire le terme* $f(x_0 + h)$ *et ensuite utiliser la question précédente.*

4. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et on suppose de plus que f est dérivable en 0 *i.e.* :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$., *i.e.* pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

   Indication. On pourra utiliser l'équation (1) *afin de réécrire le terme* $f(x_0 + h)$ ...

   (b) Donner alors $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication. Il suffit d'utiliser la question précédente ...

5. Montrer que si f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et si f est dérivable en 0, alors on a $f(x) = f'(0) \times x$.

2 L'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) \times f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

Le but de cette section est de trouver des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient

$$f(x + y) = f(x) \times f(y) \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Quelques solutions "particulières"

   (a) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$ sont des solutions à l'équation fonctionnelle (2).

   (b) Montrer que si f est une fonction constante qui est une solution de l'équation fonctionnelle (2) alors $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou bien f est la fonction nulle.

2. On suppose que f est une solution de l'équation fonctionnelle (2) qui n'est pas la fonction nulle.

   (a) Montrer que $f(0) = 1$.

   (b) Montrer que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication. On pourra montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0) = 0$ *alors* f *est la fonction nulle.*

   (c) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication. En remarquant que pour $x \in \mathbb{R}$ *on a* $x = x/2 + x/2$ *et en utilisant l'équation* (2), *on pourra commencer par écrire une relation liant* $f(x/2)$ *et* $f(x)$ ...

   (d) En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et on suppose de plus que f est continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et on suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(0)$.

5. On suppose à présent que f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et que f n'est pas la fonction nulle. On suppose de plus que f est dérivable en 0. Notre but est de montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$. Deux raisonnements sont traités.

   Première approche

   (a) Après avoir justifié que $g(x) = \ln[f(x)]$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, montrer que $g'(x) = f'(0)$.
   (b) En déduire $g(x)$.
   (c) Conclure.

   Deuxième approche

   (a) Montrer que $g(x) = \ln[f(x)]$ vérifie l'équation fonctionnelle (1).
   (b) Déduire de l'étude de l'équation fonctionnelle (1) une expression de g.
   (c) Conclure.

3 L'équation fonctionnelle $f(x \times y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

On cherche les fonctions f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

- l'équation fonctionnelle :

$$f(x \times y) = f(x) + f(y) \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}_+^*, \tag{3}$$

- f est dérivable en 1.

1. Quelques solutions "particulières"

   (a) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = a\ln(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ satisfont les deux conditions précédentes.
   (b) Montrer que si f est constante, alors f est la fonction nulle.

2. Montrer que si f n'est pas constante, alors $f(1) = 0$.

3. On pose $g(x) = f(\mathrm{e}^x)$.

   (a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g est dérivable en 0.

   Indication. On pourra écrire : $\dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \dfrac{f(\mathrm{e}^h) - f(1)}{\mathrm{e}^h - 1} \times \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$ *et calculer chacune des limites séparément.*

   Remarque. `Il est instructif de voir dans l'indication précédente la preuve de l'identité` $[f(\mathrm{e}^x)]' = f'(\mathrm{e}^x) \times (\mathrm{e}^x)'$ `... au moins en` $x = 0$.

4. Donner une équation fonctionnelle satisfaite par g et conclure.