Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des lycées et universités de l'académie de Créteil.

Thème : **Constructions fractales dans $\mathbb{R}$**

Titre : **Ensemble triadique de Cantor**

Objectifs :

- ▷ manipulation d'intervalles
- ▷ manipulation d'indices
- ▷ introduction à la construction inductive d'ensemble
- ▷ réfléchir à la notion de limite
- ▷ introduction à la dénombrabilité et raisonnement par diagonalisation

Mise en place :

Contenu :
Cette fiche est une version revisitée d'un devoir donné en cours de mathématiques pour l'informatique en licence d'informatique de l'Institut Galilée (Université Paris 13, PRES Cité Paris-Sorbonne). L'*argument de la diagonale* est une démonstration - due à Cantor - classique pour démontrer la non dénombrabilité d'ensemble dont les éléments peuvent être représentés par des développements infinis.
La première partie traite de l'intersection d'intervalles emboîtés de différents types. La seconde partie concerne l'ensemble triadique de Cantor. La fiche se termine par quelques remarques sur les suites emboîtées et le travail de Cantor.
(*), (**), (***) et (****) signalent des indications de résolution en fin de document.

Prolégomènes: suites d'intervalles emboîtés

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties emboîtées de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que quelques soient les indices i et j tels que $i < j$, $I_j \subset I_i$.
Question 0.0 : Pour n donné, que vaut

$$\bigcap_{i=0}^{n} I_i \ ?$$

On s'intéresse maintenant à l'intersection de tous les intervalles de la suite. On définit

$$I = \bigcap_{i\geq 0} I_i = \{x \in \mathbb{R}, x \in I_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Question 0.1 Pour chaque suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer I

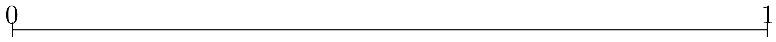
1. $I_n = [-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$
2. $I_n =]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$
3. $I_n = [-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$
4. $I_n =]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$
5. $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
6. $I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
7. $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
8. $I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

Question 0.2 Que peut-on en déduire concernant les assertions suivantes (*):
a. Une intersection infinie d'une suite décroissante d'intervalles propres (dont les bornes sont distinctes) emboîtés est un intervalle fermé.
b. Une intersection infinie d'une suite décroissante d'intervalles fermés emboîtés est un intervalle fermé.
c. Une intersection infinie d'une suite décroissante d'intervalles semi-ouvert à droite fermés est un intervalle semi-ouvert à droite.
d. Une intersection infinie d'une suite décroissante d'intervalles semi-ouvert à gauche fermés est un intervalle semi-ouvert à gauche.
e. Une intersection infinie d'une suite décroissante d'intervalles ouverts emboîtés est un intervalle ouvert.

Construction de l'ensemble de Cantor

On définit par récurrence les ensembles réels $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivants :

- K_0 est l'intervalle $[0,1]$ de longueur 1.

K_0 

- Pour obtenir K_1, on partage K_0 en trois parties égales, et l'on ôte l'intervalle ouvert de la partie intermédiaire. Il reste donc deux intervalles fermés disjoints de longueur respective $\frac{1}{3}$. K_1 est de longueur $\frac{2}{3}$.

$$K_1 = [0 = \frac{0}{3}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1 = \frac{3}{3}]$$

K_1 

- Pour obtenir K_2, on partage les deux intervalles de K_1 en trois parties égales, et l'on ôte l'intervalle ouvert de la partie intermédiaire. On obtient 4 intervalles de longueurs $\frac{1}{9}$. K_2 est de longueur $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2}$

$$K_2 = [\frac{0}{9}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$$

K_2 

- Pour obtenir K_n à partir de K_{n-1}, on partage chacun des intervalles de K_{n-1} en trois parties égales, puis l'on supprime l'intervalle ouvert de la partie intermédiaire.

Question 1.1 Représenter les ensembles K_3 et K_4.

Question 1.2 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

(a) Montrer que $K_n \subset K_{n-1}$,

(b) Donner le nombre de segments nécessaires à la représentation de K_n,

(c) Donner la longueur de chaque segment de K_n,

(d) En déduire la longueur l_n de K_n,

(e) Montrer que K_n contient toutes les bornes des segments de K_{n-1}.

Question 1.3 On appelle ensemble de Cantor - noté K - l'intersection de tous les K_n, soit

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

.

(a) Montrer que K est non vide.

(b) (**) Montrer que K contient un nombre infini d'éléments.

(c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$.

(d) (***) En déduire que K ne contient aucun intervalle propre (non réduit à un élément).

Question 1.4 On va prouver maintenant que K n'est pas un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver de bijection entre K et $\mathbb{N}$. Pour cela, on va utiliser le résultat suivant : *tout élément de K admet une écriture unique sous la forme d'un développement décimal illimité ne contenant que des* 0 *et des* 2, et un raisonnement par l'absurde particulier, *l'argument de la diagonale*, du à Cantor.

Le raisonnement est le suivant : S'il existait une bijection entre $\mathbb{N}$ et K, K pourrait être écrit sous la forme d'une liste infinie indexée par $\mathbb{N}$:

$$K = k_0, k_1, k_2, \cdots, k_i, \cdots$$

Or chaque k_i peut s'écrire sous la forme $k_n = 0, k_{i,0}k_{i,1}k_{i,2}\cdots k_{i,j}\cdots$, avec $k_{i,j} = 0$ ou 2.

On peut donc construire le tableau doublement infini suivant :

Table 1:

$k_0 = 0,$	$\mathbf{k_{0,0}}$	$k_{0,1}$	$k_{0,2}$	$\cdots$	$k_{0,n}$	$\cdots$
$k_1 = 0,$	$k_{1,0}$	$\mathbf{k_{1,1}}$	$k_{1,2}$	$\cdots$	$k_{1,n}$	$\cdots$
$k_2 = 0,$	$k_{2,0}$	$k_{2,1}$	$\mathbf{k_{2,2}}$	$\cdots$	$k_{2,n}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k_n = 0,$	$k_{n,0}$	$k_{n,1}$	$k_{n,2}$	$\cdots$	$\mathbf{k_{n,n}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Il reste a définir un nouvel élément de K dont on est certain qu'il n'est pas dans le tableau pour conclure (****).
D'après *l'hypothèse du continu*, qui dit que si une partie de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, alors elle est en bijection avec $\mathbb{R}$ lui-même, Kest donc en bijection avec $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il est beaucoup plus gros que $\mathbb{Q}$, même si, comme lui, il ne contient aucun intervalle propre.

à propos des suites emboîtées

L'ensemble triadique de Cantor est un objet de la géométrie fractale. C'est l'un des premiers exemples de fractals représentés (1883). La nature présente beaucoup d'objets de ce type. (flocon de neige, chou romanesco, côte bretonne, ...).
Les suites décroissantes d'objets emboîtés constituent des outils importants de construction d'objets mathématiques. Les mathématiciens-physiciens et philosophes de la nature de la fin du XIX° siècles comme Alfred North Whitehead, Bertrand Russell (tous les deux auteurs des Principia Mathematica) et Jean Nicod ont proposé des reconstructions de la géométrie à partir de la notion élémentaire de "régions" de l'espace, au lieu de partir de la notion de points. Arguant du fait que le point est une abstraction, alors qu'une région est un objet de la perception, il était naturel qu'un point soit un objet construit, donc plus complexe qu'une région.

Point historique : la part de Cantor

En 1874, il démontre que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il démontre qu'il en est de même de l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire l'ensemble des réels qui sont solutions de polynômes à coefficients entiers.
Toujours en 1874, il démontre que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. La preuve par diagonalisation que nous présentons est sa deuxième preuve publiée en 1891. Elle s'appuie sur une représentation particulière des nombres réels : une séquence dénombrable (obtenue par développement décimal illimité).
En utilisant la méthode de diagonalisation, il montre en 1892 que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble est strictement plus grand que le cardinal de l'ensemble (théorème de Cantor). Il fonde la théorie générale des cardinaux (finis et transfinis).
S'il est facile d'établir que $\mathbb{N}$ possède le plus petit cardinal infini, il n'a pas été possible d'établir l'existence ou non d'un cardinal compris entre celui de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. On utilise généralement l'hypothèse du continu, qui pose qu'il n'y a pas de cardinal entre ceux de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.
L'anecdote suivante - proche de la conviction d'Euclide - devrait permettre de réfléchir sur les convictions que l'on peut avoir et les "faits mathématiques" : Après avoir montré que $\mathbb{R}$ est non dénombrable, Cantor a voulu montrer que le plan contenait plus de points que la droite réelle en montrant qu'il n'existait pas de bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. En 1877, il établit une bijection entre ces deux ensembles. Il envoie alors sa preuve à son ami Richard Dedekind (1831-1916) avec le commentaire en français : " Je le vois mais je ne le crois pas".
(Ouvrage à lire A. N. Whitehead : le concept de nature (2006) Vrin.)

(*) Attention, certaines des assertions sont fausses car la question pré¸edente en donne un contre-exemple, pour les autres, on ne peut rien dire, ce n'est pas quelques exemples satisfaisant une propriété qui permettent de valider une assertion engageant tous les éléments d'une famille.

(**) On pourra par exemple montrer que la suite strictement décroissante $(\frac{1}{3^n})_{n \in N_*}$ est incluse dans K.

(***) La longueur d'un intervalle propre est strictement positive.

(****) Soit $C = 0, d_0 d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$ tel que si $k_{i,i} = 2$ alors $d_i = 0$ sinon $d_i = 0$. Il suffit de montrer que C est bien un élément de K, et qu'il il ne peut être placé dans le tableau car il diffère de tous les éléments du tableau au moins par l'élément diagonal.