Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des Lycées et Universités de l'Académie de Créteil.

Approximation d'un réel
Suites adjacentes et irrationnalité de e

Objectifs :

- ➢ Découvrir la notion de suites adjacentes.
- ➢ Réinvestir les connaissances sur les suites.
- ➢ Obtenir une valeur approchée de e
- ➢ Utiliser un raisonnement par l'absurde.

Mise en Place : Une séance de 2h pour les parties **A**, **B** et **C** ; la partie **D** à traiter en devoir maison.

Contenu : Cours sur les suites, théorèmes de convergence et monotonie ; nombre e.

<u>Partie A</u> : Suites Adjacentes

On appelle *suites adjacentes* deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Deux suites adjacentes sont convergentes, vers une même limite ℓ.*

Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus.

1. Commençons par montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n$.
   Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - u_n$.
   Étudier les variations de (w_n), et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_0$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ_u.
   (b) Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ_v. En déduire le théorème.

<u>Partie B</u> : Factorielle

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On appelle *factorielle* n et on note $n!$ le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

On pose par convention $0! = 1$.

1. Calculer $3!$ et $4!$. Simplifier et calculer (donc sans utiliser de calculatrice) le nombre $\dfrac{12!}{9!\,3!}$
2. Calculer $(n+1)!$ en fonction de $n!$.
3. 🖩 Écrire un algorithme à la calculatrice renvoyant, un entier k étant donné, le plus petit entier n tel que $n! > 10^k$. Quel nombre obtient-on si on entre $k = 7$?

Partie C : Étude de deux suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. (a) Calculer $u_0,\ u_1,\ u_2$.
   (b) Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ? Le démontrer.
2. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel ℓ.
4. Approximation.
   (a) Montrer que u_{11} réalise une valeur aprochée de ℓ à 10^{-7}.
   (b) On admettra que le réel ℓ est le nombre d'Euler $\mathrm{e} = \exp(1)$.
   Calculer u_{11} (valeur exacte sous forme de fraction, puis valeur approchée à 10^{-7}), et vérifier à la calculatrice que u_{11} réalise une valeur aprochée de e.

☞ L'étude de la suite (v'_n) définie par $v'_n = u_n + \dfrac{1}{n!\,n}$ permet de montrer que u_{11} réalise en fait une valeur approchée à 10^{-8} du réel e.

Partie D : Étude de la limite ℓ

Le but de ce qui suit est de montrer que le nombre e n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers (un peu comme $\sqrt{2}$, π...).
Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose donc qu'on a l'écriture sous forme de fraction (irréductible) $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, le nombre $n!\,u_n$ est entier.
2. Montrer l'encadrement
$$q! \times u_q \ < \ p(q-1)! \ < \ q! \times u_q + 1$$
3. En déduire une contradiction et conclure.

Indications :

A 1. On démontrera par l'absurde que pour tout entier naturel n, on a $w_n \geqslant 0$.

C 4.(a) On pourra commencer par vérifier l'encadrement $0 < \ell - u_n < \dfrac{1}{n!}$

D 2. On pourra commencer par montrer l'inégalité $u_q < \ell < v_q$.