Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des lycées et universités de l'académie de Créteil.

Thème : **Approximations rationnelles de $\sqrt{2}$**

Titre : **Méthode de Babylone**

Objectifs :

- ▷ Comparaison d'approximations.
- ▷ Etude d'une fonction.
- ▷ Etude d'une suite.
- ▷ Algorithme de calcul approché.
- ▷ Supplément arithmétique pour l'option mathématique.

Mise en place :
Plusieurs séances de TD correspondant aux différentes notions abordées ou en synthèse.

Contenu :
Après un bref rappel historique, cette fiche présente un problème en quatre parties. La première concerne le type d'approximation de $\sqrt{2}$ utilisé par les Babyloniens, la seconde étudie la fonction associée, la troisième la suite associée et la quatrième réclame l'écriture des algorithmes de calcul de l'approximation.

Enfin, une partie complémentaire est offerte aux élèves de l'option mathématique, et vise à prouver l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ en utilisant la preuve toujours actuelle esquissée par Aristote et écrite par Euclide.

(*) et (**) signalent des indications de résolution en dernière page.

Algorithme de Babylone : approximation rationnelle de $\sqrt{2}$

Contexte historique

Il y a 3 000 ans avant l'ère commune, la nécessité de manipuler de grandes quantités de marchandises, de faire des répartitions de terrains, de lever les impôts, ... a conduit les Sumériens à développer des systèmes de comptage et de mesurage dépendant des types de biens manipulés. Les objets discrets (comme les moutons, les bananes) sont comptés en *nombres*. Le reste relève des grandeurs, et est mesuré à l'aide d'unités conventionnelles, comme le *pied* pour les longueurs.
Un nombre est le nombre de fois que l'on doit représenter un objet pour en donner sa quantité : 3 bananes = une banane + une banane + une banane = 3 fois une banane. Un nombre sumérien est ce que nous appelons actuellement *nombre entier naturel.* Cette définition a prévalu en Europe jusqu'au XV^{ème} siècle. Le calcul des proportions, à l'aide des nombres entiers ne posait pas de problème. Les rapports entre ces nombres s'appelaient les *raisons*, terme que l'on retrouve encore dans la dénomination[1] des suites de la forme $u_n = qu_{n-1}$.
En revanche, les autres nombres réels, comme π ou $\sqrt{2}$ étaient pour les personnes de l'Antiquité greco-latine un outrage à la raison, et ont reçu de la part des Pythagoriciens le nom de *nombres irrationnels* bien que certains d'entre eux, comme π ou $\sqrt{2}$ se sont révélés très tôt indispensables à la mesure *exacte* des longueurs et des surfaces des objets physiques. Heureusement, quelque soit le nombre irrationnel, et quelque soit la longueur d'un intervalle ouvert le contenant, il y a toujours un nombre rationnel contenu dans cet intervalle (et même une infinité !). On dit que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est *dense* dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Cette propriété générale n'a été démontrée qu'au dix-neuvième siècle, mais les anciens connaissaient des méthodes d'approximations rationnelles de π ou $\sqrt{2}$.

le problème

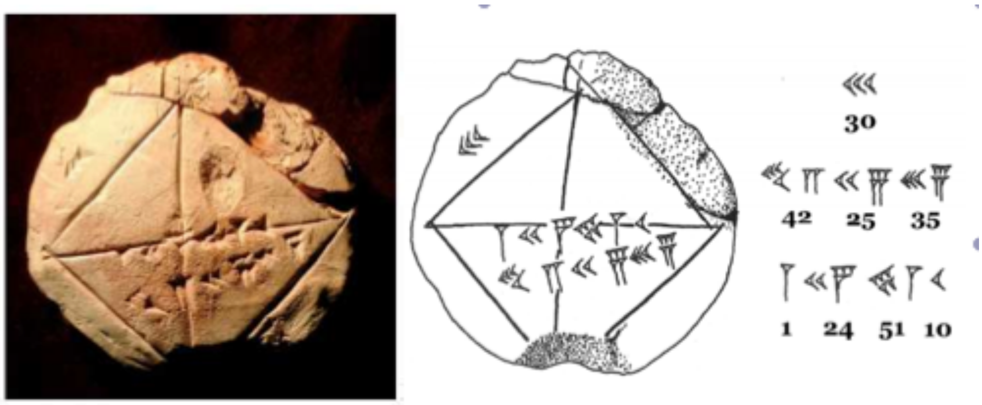
I. Moyenne arithmétique

1 – Soit a une valeur approchée par défaut[2] [resp. par excès[3]] de $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $\dfrac{2}{a}$ est une valeur approchée par excès [resp. par défaut] de $\sqrt{2}$.
2. Montrer que leur moyenne arithmétique $\dfrac{1}{2}(a + \dfrac{2}{a})$ est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$.

C'est sur ce fait qu'est fondée la méthode retrouvée sur une tablette babylonienne (1500 ans avant l'ère commune) pour obtenir 1,414229 comme approximation rationnelle de $\sqrt{2}$.

[1] Ce sont des suites géométriques de raison q.
[2] $\sqrt{2} - a > 0$
[3] $\sqrt{2} - a < 0$



Tablette YBC 7289, Yale Babylonian Collection – Photo, dessins et schémas © Jacques Lubczanski
Source : http://mini-site.louvre.fr/babylone/COMMUN/pdf/l_p1.pdf

II. Etude de la fonction associée à la moyenne arithmétique.

2 – On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de f dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Etablir le tableau de variation complet de f sur $]0;+\infty[$.

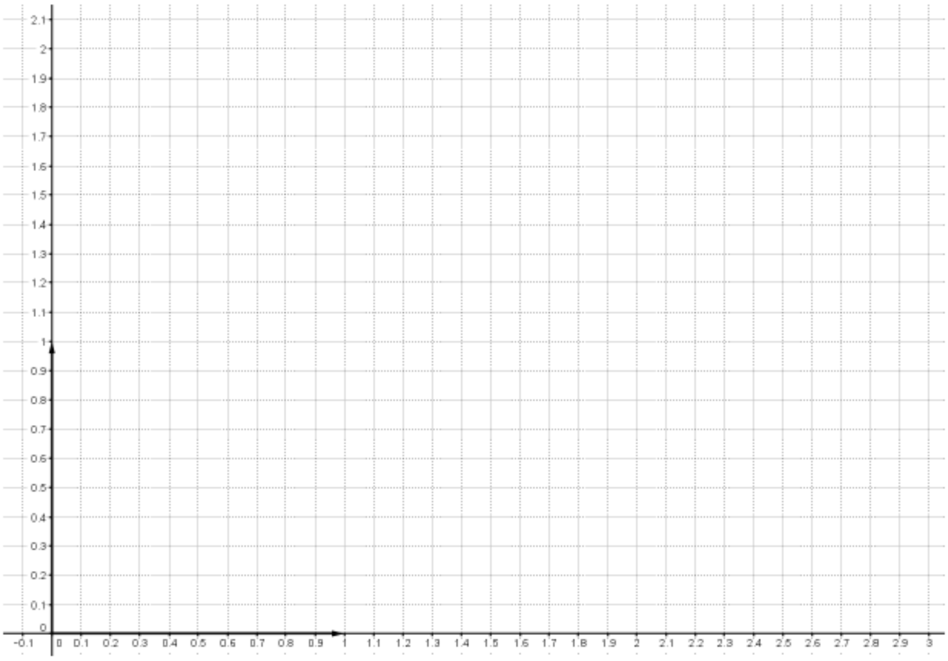
2. On dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est l'*asymptote oblique* à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$ ou, ce qui est équivalent, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax - b] = 0$.

   Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

3. Résoudre $f(x) = x$. Interpréter graphiquement le résultat.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \sqrt{2} = \dfrac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}$.

5. Construire $\mathcal{C}$ dans le repère ci-dessous, ainsi que les éléments remarquables associés, en particulier Δ.



6. Préciser les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

III. Etude d'une suite associée

3 – On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à l'intervalle $[\sqrt{2}; \frac{3}{2}]$.
2. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel (c'est-à-dire peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers naturels).
4. Calculer sous forme exacte et approchée les quatre premiers termes de la suite.
5. Vérifier que $u_0 < \sqrt{2} < u_4 < u_3 < u_2 < u_1$
6. Représenter graphiquement ces termes sur le graphique précédent.
7. (*) Que peut-on conjecturer concernant le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite. Déterminer l.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.
10. En déduire un autre moyen de calculer l.

IV. Algorithmes

4 – **(a)** Ecrire un algorithme calculant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, l'ordre d'approximation p étant demandé en entrée.

(b) Modifier cet algorithme pour afficher également le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la valeur approchée en question.

(c) Programmer cet algorithme dans le langage de votre choix et compléter le tableau ci-dessous :

Table 1:

p	valeur approchée de $\sqrt{2}$	nombre d'itérations nécessaires
2		
3		
5		
8		
10		

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Dans son livre Premiers analytiques, le philosophe grec Aristote (IVème siècle avant notre ère) décrit schématiquement la méthode par l'absurde utilisée actuellement pour prouver l'irrationnalité (ou incommensurabilité) de la diagonale : "Les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si l'on posait la diagonale commensurable" (41a27). La démonstration se trouve dans les Eléments d'Euclide (publié vers 300 avant notre ère).

5 – Montrer que $\sqrt{2}$ est un de ces nombres indispensables, pour le calcul de la longueur d'une diagonale d'une figure géométrique usuelle.

Quelques préliminaires

6 – Montrer que tout nombre rationnel peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers premiers entre eux, c'est-à-dire sans diviseurs communs.

7 – Soit a un entier naturel

1. Montrer que deux nombres premiers entre eux ne peuvent être tous les deux pairs.
2. Montrer que si a est pair, alors a^2 est pair.
3. Montrer que si a est impair, alors a^2 est impair.
4. Si a^2 est pair, que peut-on dire de a ?
5. Si a^2 est impair, que peut-on dire de a ?

Irrationalité de $\sqrt{2}$

8 – (**) Montrer que si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe deux entiers premiers entre eux a et b tels que $a^2 = 2b^2$ et en déduire une contradiction.

(*) La suite est positive et décroissante à partir de u_1, elle est donc convergente.
(**) Relire le passage d'Aristote et utiliser les préliminaires.
Puisque a^2 est pair, en utilisant un préliminaire, on peut écrire $a = 2c$, substituer et en déduire l'absurdité.