SEQUENCE 14
Nombres Premiers

Objectifs de la séquence

- Connaître et utiliser le vocabulaire sur les multiples et les diviseurs.
- Reconnaître des nombres premiers.
- Décomposer un nombre donné en produit de facteurs premiers avec ou sans la calculatrice.
- Résolutions de problèmes d'arithmétique utilisant de manière implicite les notions de PGCD et de PPCM.

Organisation

Cette séquence de travail sur les nombres premiers se découpe en plusieurs séances. Le déroulé de chaque séance est donné ci-dessous.

Nous vous conseillons de faire une à deux séances maximum par jour. Nous vous laissons **une dizaine de jours** pour faire la totalité des séances. Libre à vous d'organiser votre temps de travail ! Au fur et à mesure, envoyer votre travail à votre professeur afin qu'il vous corrige.

Plan de travail

Séance 1 (45 minutes)

- Lecture du cours pour s'approprier le vocabulaire d'arithmétique et revoir les critères de divisibilité. Regarder les vidéos d'Yvan MONKA pour compléter le cours :
  I/ Multiples et Diviseurs
  1) Division euclidienne
  2) Multiples et diviseurs
     https://www.youtube.com/watch?v=-PLZFlAG99Q
  3) Critères de divisibilité
     https://www.youtube.com/watch?v=BJDE6uOrmYQ
- Exercices 1, 2, 3, 4 et 5 de la feuille à faire.

Séance 2 (1 heure)

- Lecture du cours pour comprendre ce qu'est un nombre premier et étudier ses propriétés. Regarder également les vidéos d'Yvan MONKA pour compléter le cours :
  II/ Nombres premiers
  1) Reconnaître un nombre premier
     https://www.youtube.com/watch?v=6pPcshCDPkY
  2) Diviseurs communs
     https://www.youtube.com/watch?v=sSgsrHMyFrI
- Exercices 6, 7 et 8 de la feuille à faire.

Séance 3 (50 minutes)

- Lecture de la suite du cours en prenant le temps de refaire les différents exemples. Regarder également les vidéos d'Yvan MONKA pour compléter le cours :
  III/ Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
  1) Décomposition en produit de facteurs premiers
     https://www.youtube.com/watch?v=RBE2wPIKagI
  2) Avec la calculatrice
     https://www.youtube.com/watch?v=bC7D1KVk5HQ
- Exercices 9, 10 et 11 de la feuille à faire.

Séance 4 (50 minutes)

- Lecture de la suite du cours en prenant le temps de refaire les différents exemples. Regarder également les vidéos d'Yvan MONKA pour compléter le cours :
  IV/ Applications
  1) Fractions irréductibles
     https://www.youtube.com/watch?v=HkqUaPYgwQM
     https://www.youtube.com/watch?v=qZaTliAWkA0
  2) Résolution de problème
- Exercices 12, 13 et 14 (facultatif) de la feuille à faire.

SEQUENCE 14
Nombres premiers

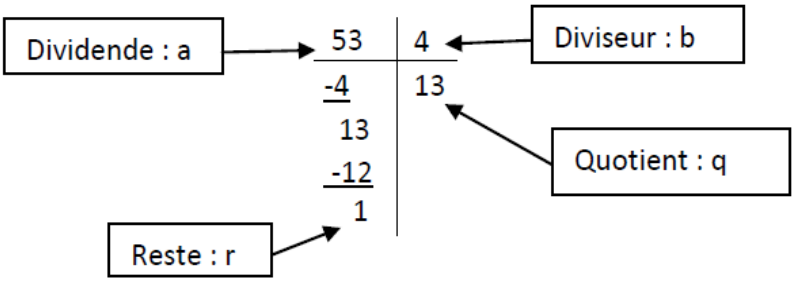
I/ Multiples et diviseurs

1) Division euclidienne

Vocabulaire :
a et b désignent deux nombres entiers positifs quelconques. On suppose que b est non nul ($b \neq 0$). Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer les deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$
$$Dividende = diviseur \times quotient + reste$$

Exemple :
On pose la division euclidienne de 53 par 4 :



On écrit l'égalité : $53 = 4 \times 13 + 1$

2) Multiples et diviseurs

Définition :
On dit que b est **un diviseur** de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul (égal à 0). On a donc : $a = b \times q$
On dit alors que b **divise** a, que a **est divisible par** b ou que a est un **multiple** de b.

Exemple :
72 est divisible par 8.
8 et 9 sont des diviseurs de 72.
72 est un multiple de 8 et un multiple de 9.

$$72 = 8 \times 9$$

Remarque :
Ce vocabulaire est uniquement valable pour les **nombres entiers**.

3) Critères de divisibilité

Propriétés :
Un nombre entier est divisible par :
- 2 lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 4 lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 ;
- 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- 10 lorsque son chiffre des unités est 0.

Exemples :

- 2 160 est divisible par 2, par 5, par 10. En effet, le chiffre des unités est 0.
- 2 160 est divisible par 4. En effet, 60 est divisible par 4.
- 2 160 est divisible par 3 et 9. En effet, $2 + 1 + 6 + 0 = 9$ et 9 est divisible par 3 et par 9.

II/ Nombres premiers

1) Reconnaître un nombre premier

Définition :
Un nombre entier positif est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples et contre-exemple :

- Voici la liste des 25 premiers nombres premiers :
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97…
  7 est un nombre premier : il n'est divisible que 1 et par 7.
- 6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme autres diviseurs.

Remarques importantes :
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par n'importe quel nombre non nul.
- 1 n'est pas un nombre premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

2) Déterminer les diviseurs communs de deux nombres entiers positifs.

On cherche ici à déterminer tous les diviseurs communs à 60 et 100 :

Méthode :
Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.
Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Ici, le plus grand diviseur commun des nombres 60 et 100 est **20**.

III/ Décomposer un nombre entier positif en produit de facteurs premiers.

1) Décomposition en produit de facteurs premiers.

Propriété :
Tout nombre entier non premier peut se décomposer **en produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique. Changer l'ordre des facteurs ne change en rien la décomposition.

Exemple 1 :
Décomposer 84 en produit de facteurs premiers :

84	2	car $84 = 42 \times 2$
42	2	car $42 = 21 \times 2$
21	3	car $21 = 3 \times 7$
7	**7**	**car $7 = 7 \times 1$**
1		

Ainsi $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

Exemple 2 **:**
Décomposer 2 520 en produit de facteurs premiers.

Méthode 1

On cherche les diviseurs premiers de 2520 dans l'ordre croissant en utilisant les critères de divisibilité :

$$\begin{aligned} 2\,520 &= 2 \times 1\,260 \\ &= 2 \times 2 \times 630 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 315 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 105 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 35 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

Méthode 2

On peut écrire le nombre donné comme produit de facteurs pas forcément premiers et on recommence avec les facteurs trouvés.

$$\begin{aligned} 2\,520 &= 252 \times 10 \\ &= 126 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 63 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 7 \times 9 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7}$

2) Avec la calculatrice

Exemple :

Décomposer le nombre 300 en produits de facteurs premiers.

Méthode :

Touches CASIO $f_x -$ 92 Spéciale collège : 


Taper 300, puis taper 

, ensuite taper  ou Décomp

On écrit : $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

IV/ Applications

1) Fractions irréductibles

Définition :

Une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple 1 : Trouver la fraction irréductible égale à $\frac{84}{30}$.

Solution :

On peut décomposer le numérateur et le dénominateur de la fraction en produit de facteurs premiers

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 7}{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 5} = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$$

Remarque :

On peut aussi utiliser ce que l'on a vu dans les classes précédente 84 et 30 sont des multiples de 6 d'après les critères de divisibilité. En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par 6 on obtient le résultat :

$$\frac{84}{30} = \frac{6 \times 14}{6 \times 5} = \frac{14}{5}$$

Exemple 2 : La fraction $\frac{246}{51}$ est-elle irréductible ?

Solution :

246 et 51 sont divisibles par 3 donc $\frac{246}{51}$ n'est pas irréductible.

Remarque :

On n'a pas toujours besoin de la décomposition en facteurs premiers pour répondre à ce type de question !

2) Résolution de problème

Problème :

Une roue d'engrenage A a 12 dents. Elle est en contact avec une roue B de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune des roues sera-t-elle de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

Solution :

- Lorsque les roues sont à nouveau dans la même position, elles ont tourné d'un nombre entier de tours, donc :
  - L'engrenage A a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 12 ;
  - L'engrenage B a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 18.

- On décompose 12 et 18 en produit de facteurs premiers :

  $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ $\qquad$ $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$

  On observe que le premier multiple non nul commun à 12 et 18 est obtenu en multipliant 12 par 3 et 18 par 2. Ce multiple commun est donc $2^2 \times 3^2 = 36$.

  En effet, $3 \times (2^2 \times 3) = 2^2 \times 3^2 = 36$ et $2 \times (2 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2 = 36$.

- Ainsi, les roues occuperont à nouveau la même position pour première fois lorsque A aura fait 3 tours et B 2 tours.

Autre méthode :

Pour de petits nombres comme 12 et 18, on peut trouver un multiple commun en écrivant les listes de multiples non nuls.

- Multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, 60, ...
- Multiples de 18 : 18, 36, 54, 72,...

$36 = 3 \times 12$, donc A fait 3 tours.

$36 = 2 \times 18$, donc B fait 2 tours.