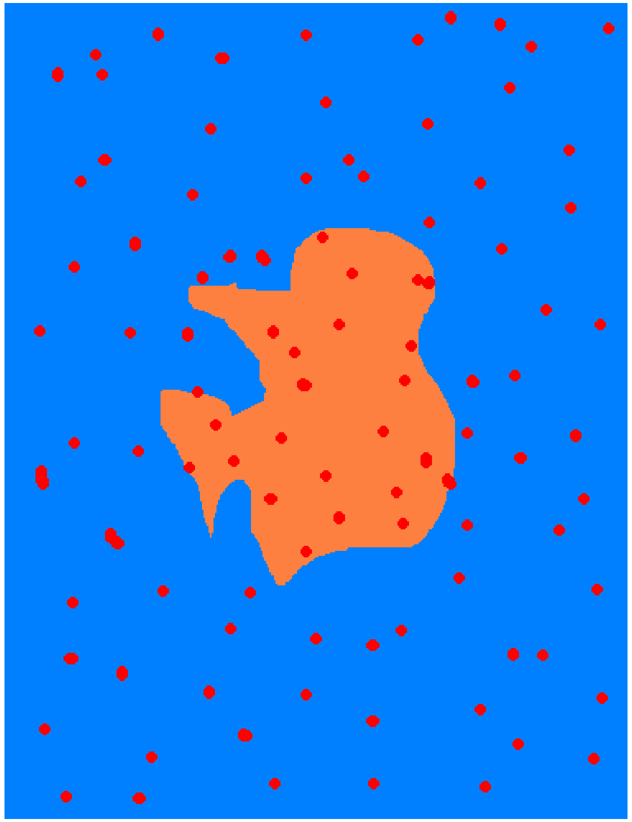
Approximation de Pi par la méthode de Monte Carlo

- <u>Idée générale:</u>
- On connaît l’aire du rectangle.
- On cherche à estimer l’aire de l’île.

On place des points au hasard dans le rectangle. Lorsque le nombre de points placés tend vers l’infini, la proportion des points « tombés » sur l’île permet d’obtenir son aire.

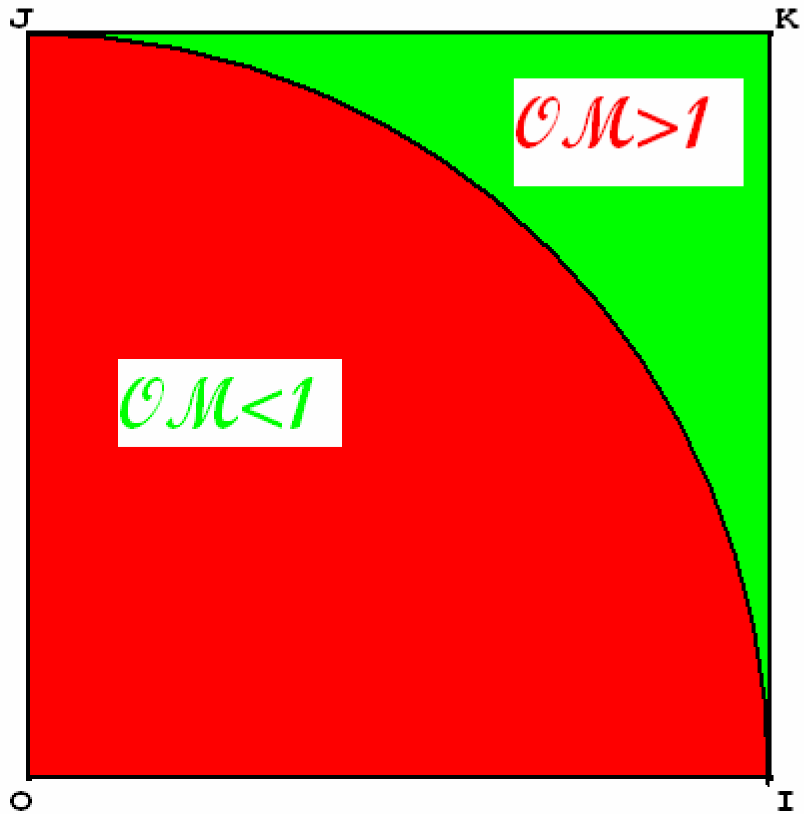


En pratique, il faut cependant pouvoir

- Placer des points aléatoirement dans le domaine
- Compter ceux ayant atterri sur le sous domaine grâce à une formule.

Situation étudiée:

- Dans le repère orthonormal (O;I;J) l'aire du carré OIKJ vaut 1.
- On va utiliser la méthode de Monte Carlo pour approcher l'aire du quart de disque c'est-à-dire Pi/4.
- En multipliant par quatre on retrouvera Pi.



Algorithme en langage naturel

VARIABLE

disque: compte le nombre de points situés à l'intérieur du quart de disque
n: nombre de points placés aléatoirement
x :abscisse d'un point au hasard dans le carré
y :ordonnée d'un point au hasard dans le carré

TRAITEMENT

Pour i de 1 à n

- **x** prend une valeur aléatoire dans [0 ;1]
- **y** prend une valeur aléatoire dans [0 ;1]
- **Si** $x^2+y^2<1$ alors disque prend la valeur **disque** +1

SORTIE

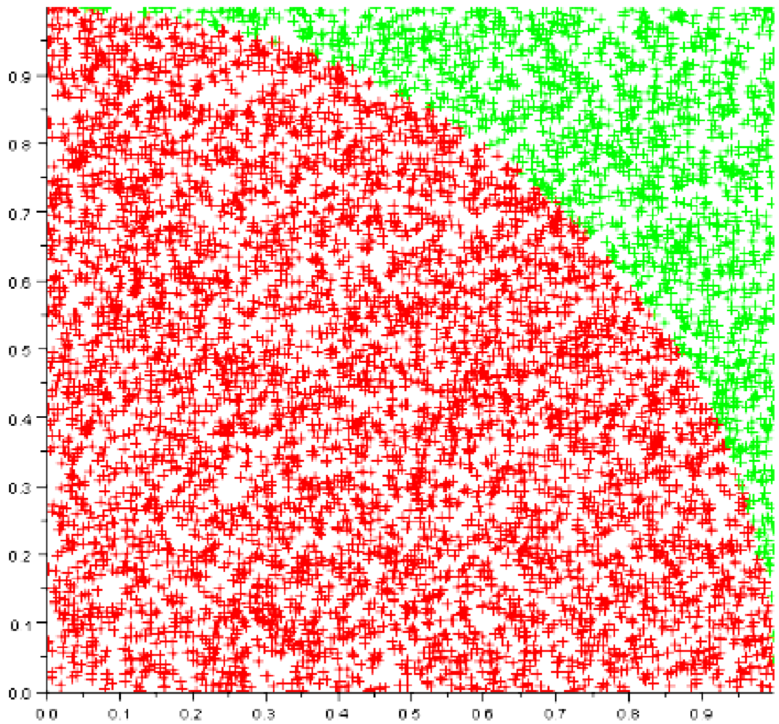
Afficher (**disque** /**n**)

Algorithme en Scilab

Fichier Edition Rechercher Exécuter Débug Lan

```
clf;
disque=0;
for i=1:10^8
  x=rand();
  y=rand();
if x^2+y^2<1 then disque=disque+1;
                  plot(x,y,"+r")
  else plot(x,y,"+g")
end
end
afficher(4*disque/10^8)
```

Visualisation des résultats avec Scilab




```
-1->clf;

-1->disque=0;

-1->for i=1:10^8
-1->   x=rand();
-1->   y=rand();
-1->if x^2+y^2<1 then disque=disque+1;
-1->
-1->end
-1->end
-1->afficher(4*disque/10^8)

    3.1416378
```

Les premières décimales de Pi sont 3,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages...

Points forts/Points faibles de la méthode

Points forts

- 1. C’est beau !
- 2. C’est simple!
- 3. Ça marche !

Pourquoi ça marche ?

- C'est la loi des grands nombres

- On pose $p = \dfrac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}}$

- On pose $\mathrm{f}_{\mathrm{obs}}$ la fréquence observée de points situés dans le quart de disque.
- Alors en plaçant n points aléatoirement, si n est assez grand,

  on a plus de 95% de chances que p soit compris dans

$$\left[\mathrm{f}_{\mathrm{obs}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}} ; \mathrm{f}_{\mathrm{obs}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}} \right]$$

Points forts/Points faibles de la méthode

- <u>Point faible</u>
- La méthode est très coûteuse en calcul à cause de la lenteur de la convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

  Du coup ici, on ne voit pas beaucoup de décimales de Pi...mais on voit facilement apparaître 3,14.

Contenus mathématiques au programme

- Repérer un point du plan
- Calculer la distance entre deux points à partir de leurs coordonnées.
- Réalisation d’une simulation.
- Estimation d’une proportion à partir d’un échantillon.

Prolongements et compléments

- La méthode de Monte Carlo permet de
  calculer des intégrales
  donc des aires sous une courbe
  ou des volumes
  ou l'espérance d'une variable aléatoire

Un exemple avec tableur

- On détermine une valeur approchée de l’aire située entre l’axe des abscisses et la parabole représentant la fonction carré sur [0;1].

- Aire sous la parabole par MC.xls