A partir d'un problème classique de fiabilité industrielle

Université d'été 2012 de l'Inspection Générale de Mathématiques

Modèles mathématiques et réalité

Sourdun, 29 août 2012

Atelier animé par Jean-Pierre RAOULT
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
jpraoult@orange.fr
Thème issu d'une recherche menée avec Zineb Azouz
(Université Mentouri, Constantine, Algérie)

Nous allons partir de la modélisation d'objets "unidimensionnels" ("filiformes") tels que cables, pipes-lines, vaisseaux sanguins .. qui deviennent hors service quand une portion suffisamment longue est endommagée, cet endommagement étant aléatoire.

Mon attention a été attirée sur ces situations par Zineb Azouz, de l'Institut de Mathématiques de l'université Mentouri (Constantine, Algérie), où des chercheurs travaillent sur la fiabilité d'oléoducs ; le contenu du présent atelier est nourri de nos recherches sur des extensions de cette situation, consultables pour une bonne part sur : Zineb AZOUZ (2012) *Minorants de la fiabilité pour des systèmes à recouvrements*, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00701690.

La première étape consiste en une **discrétisation** du problème : le **système** (mot standard en fiabilité) considéré est décomposé en n "composants" dont la fiabilité individuelle, p, est une entrée du modèle ; il est déficient si un nombre suffisant (k, autre entrée du problème) d'entre eux, **consécutifs**, sont en panne.

PREMIERE ETUDE

Système de type k-consécutifs sur n.

L'ensemble des composants du système est noté $\{1, ..., n\}$.

L'état de l'élément i est noté X_i : variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si l'élément i est en marche, 0 s'il est en panne.

1. Ecrire formellement l'évènement F_n *: le système est hors service* (F pour "failure"). Celui-ci survient si k variables X_i, pour des valeurs de i consécutives, prennent la valeur 0.

2. Les X_i étant supposées indépendantes et identiquement distribuées ($\mathbb{P}(X_i = 1) = p$), **élaborer un mode de calcul**, par récurrence sur n, de la probabilité de F_n, qu'on notera $Q_{k,n,p}$.

N.B. Dans la pratique, n est "très grand" devant k et p est "très proche" de 1 .

REPONSES

Le système est hors service si et seulement s'il existe i $(1 \leq i \leq n-k+1)$ tel que les composants $(i, i+1, ..., i+k-1)$ soient tous en panne.

Donc $F_n = \bigcup_{i=1}^{n-k+1} \bigcap_{j=i}^{i+k-1} [X_j = 0]$

Il s'agit d'une union d'évènements non indépendants ; le calcul de la probabilité de F_n serait en principe réalisable par la formule de Poincaré mais celle-ci devient vite extrêmement lourde. quand k croît (or des valeurs du type $k = 20$, $n = 10000$ sont tout à fait envisageables pratiquement).

Il vaut mieux procéder par récurrence sur n : si les composants sont indépendants et de même probabilité de fonctionnement p, la probabilité de panne du système, $Q_{k,n,p}$ vérifie :

- si $n < k$ $Q_{k,n,p} = 0$,
- si $n = k$ $Q_{k,n,p} = (1-p)^k$,
- si $n > k$ $Q_{k,n,p} = p[\sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} Q_{k,n-i,p}] + (1-p)^k$.

Principe de la récurrence

- si l'élément 1 est en marche (probabilité p), la recherche de k éléments consécutifs en panne doit se faire à partir du second, d'où, dans l'expression de $Q_{k,n,p}$, le terme

$$pQ_{k,n-1,p}$$

- si l'élément 1 est en panne et l'élément 2 en marche (probabilité $(1-p)p$), la recherche de k éléments consécutifs en panne doit se faire à partir du troisième, d'où le terme

$$(1-p)pQ_{k,n-2,p}$$

- ...

- si les éléments 1 à k sont en panne le système est hors service, d'où le terme

$$(1-p)^k$$

Programme réalisant cette récurrence

Remarquant que $Q_{k,n,p}$ est multiple de $(1-p)^k$, on a programmé le calcul des polynômes $P_{k,n}(p)$ tels que

$$Q_{k,n,p} = (1-p)^k P_{k,n}(p)$$

Quand on rentre les valeurs de k, n et p, le programme fournit les valeurs de $u_m = P_{k,m}(p)$ pour tous les m variant de k à n.

Je tiens ce programme (en langage C) à la disposition des participants intéressés.

Exemple d'extrait de suite de résultats

$k = 3$, $n = 1000$, $p = 0.9$

La probabilité de panne est la valeur affichée multipliée par 10^{-3}

k= 3 n= 3 un=1

k= 3 n= 4 un=1.900000

k= 3 n= 5 un=2.800000

...

k= 3 n= 10 un=7.291540

...

k= 3 n= 20 un=16.213854

...

k= 3 n= 50 un=42.502519

...

k= 3 n= 100 un=84.765175

...

k= 3 n= 500 un=362.189393

...

k= 3 n= 1000 un=593.892666

Une généralisation souhaitée : systèmes bidimensionnels de type (h, k)-consécutifs sur (m, n)

On souhaite s'intéresser à des "tissus" (textiles, organiques ....) ou des "plaques" qui deviennent hors service quand une portion suffisamment vaste est endommagée.

On va se limiter à des systèmes représentables (éventuellement après transformations) par des rectangles qui sont hors service quand un sous-rectangle suffisamment vaste est endommagé.

Comme dans le cas unidimensionnel, on va "discrétiser la situation" et donc modéliser le système par l'ensemble de composants

$$R_{m,n} = \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$$

et, étant fixés h $(1 \leq h \leq m)$ et k $(1 \leq k \leq n)$, convenir que le système est en panne s'il existe un sous-rectangle, de base de longueur h et hauteur de longueur k tel que tous les composants (i, j) dans ce rectangle sont en panne (i.e. $X_{i,j} = 0$).

Une idée naturelle pour calculer la probabilité de panne d'un tel système, à composants indépendants, soit $Q_{h,m;k,n;p}$, est de chercher une récurrence double (sur les dimensions m et n) mais **les difficultés combinatoires sont importantes**.

Deux voies en pareil cas :

A. Chercher une méthode de calcul explicite en **acceptant certaines contraintes sur les paramètres** (avec le risque que ces contraintes ne soient pas satisfaites dans les cas que l'on a à traiter).

B. Renoncer au calcul explicite ; en fiabilité, l'important est souvent de souvent de s'assurer d'un **minorant de la fiabilité** (on veut que la probabilité de bon fonctionnement soit au moins de ...), autrement dit d'un majorant de la probabilité que le système soit hors service. Un avantage théorique de la voie B est que l'on peut, en cherchant des idées de techniques pour la recherche de minorants, constater que ces idées pourraient s'appliquer à des cadres plus généraux que celui pour lequel on les a élaborées.

Nous allons en fait combiner les deux voies, l'idée étant de trouver une méthode qui fournit, pour un système sans contraintes sur les paramètres, un minorant de la fiabilité faisant intervenir des sous-systèmes qui satisfont aux contraintes utilisées dans la voie A.

Notre point de départ : YI-CHIH HSIEH et TA-CHENG CHEN (2004) *Reliability lower bounds for two dimensional consecutive-k-ouf-of-n : F systems*, *Computers & Operations Research*, vol.31, pp 1259-1272.

Dans cet article, relatif à des plaques carrées (avec nos notations $m = n$ et $h = k$) les auteurs démontrent que la fiabilité est minorée par le produit des fiabilités de tous les sous-carrés de côtés de longueur k , qui, eux, sont en panne si seulement si tous leurs éléments sont en panne, donc, vu l'hypothèse d'indépendance, chacun avec une probabilité $(1-p)^{k^2}$, d'où le minorant de la fiabilité :

$$1 - Q_{h,m;k,n;p} \geq (1-(1-p)^{k^2})^{(n-k+1)^2}$$

DEUXIEME ETUDE

Chercher des interprétations à l'inégalité utilisée par YI-CHIH HSIEH et TA-CHENG CHEN

Autrement dit analyser le "système auxiliaire" dont la fiabilité est $(1-(1-p)^{k^2})^{(n-k+1)^2}$

Essayer d'en déduire le cadre plus général dans lequel l'idée de ces auteurs pourrait être encore opérationnelle.

Réponses

Dans le système auxiliaire, on fait comme si les sous-carrés de dimension k étant indépendants et alors, comme ils sont montés “en série” (défaillance du système dès que l’un de ces sous-carrés est défaillant), la fiabilité du système complet est le produit des fiabilités de ces sous-systèmes (qui eux, en interne, sont des montages “en parallèle” de composants et donc leur probabilité de défaillance est le produit des probabilités de panne individuelles des composants).

On peut aussi dire que le système auxiliaire se déduit du système donné en “démultipliant” chaque composant en autant de composants nouveaux, indépendants, qu’il y a de sous-carrés de dimension k auxquels ils appartient ; ce système est le montage en série de sous-systèmes carrés de dimension k, disjoints, et qui héritent chacun de l’un des nouveaux composants issus de chacun des composants qui lui appartenaient dans le système initial.
Travail : faire un dessin traduisant cette description heuristique

TROISIEME ETUDE

Se demander si l'aspect géométrique (carrés et sous-carrés) du cadre qu'on vient d'étudier joue un rôle dans l'inégalité qu'il y a lieu de démontrer.

Autrement dit : imaginer un cadre général dans lequel celle-ci "a des chances" d'être vérifiée.

Réponse

Système à recouvrement

Le système $\mathcal{S}$, dont l'ensemble des composants est noté S, est dit *à recouvrement* s'il existe un recouvrement de S, soit $S_1, \ldots, S_m$ tel que $\mathcal{S}$ soit en panne si et seulement s'il existe au moins une des parties S_j $(1 \leq j \leq m)$ dont les composants soient tous en panne.

Il est dit *à recouvrement indépendant* si, $\mathcal{C}$ étant la partition engendrée par le recouvrement $S_1, \ldots, S_m$, les variables aléatoires X_C, où C parcourt $\mathcal{C}$, sont indépendantes (en fait nous nous nous limiterons aux systèmes à composants tous indépendants)

Travail : s'assurer que les systèmes unidimensionnels ou bidimensionnels déjà considérés rentrent bien dans ce cadre.

La minoration de YI-CHIH HSIEH et TA-CHENG CHEN est-elle bien valable dans ce cadre ?

Demandons nous ce qu'elle signifierait dans le cas élémentaire d'un recouvrement par deux parties . On a alors un lemme, un peu plus général que notre besoin immédiat mais utile dans la suite. On rappelle qu'un système est dit *cohérent* si, quand, partant d'un état de fonctionnement, on fait passer un composant de l'état de panne à l'état de marche, le système reste en fonctionnement.

Soit $\mathcal{T}$ le montage en série de deux sous-systèmes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, d'ensembles de composants non disjoints, T_1 et T_2 ; l'ensemble de composants de $\mathcal{T}$ est $T_1 \cup T_2$; les états des trois sous-ensembles de composants $T_1 - T_2$, $T_1 \cap T_2$ et $T_2 - T_1$ sont indépendants ; le premier sous-système est monté en parallèle et le second est cohérent. Alors, si M_1 (resp. M_2) désigne l'événement "$\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) est en marche", on a : $P(M_1 \mid M_2) \geq P(M_1)$, autrement dit

$$P(M) = P(M_1 \cap M_2) \geq P(M_1)P(M_2)$$

Ce lemme est bien ce qu'il nous faut ;

Le recouvrement de S étant $S_1, ..., S_m$, on l'applique successivement :

- au couple $(S_1, \bigcup_{j=2}^{m} S_j)$,
- au couple $(S_2, \bigcup_{j=3}^{m} S_j)$,
- ...
- au couple (S_{m-1}, S_m).

Ce lemme peut aussi s'interpréter comme faisant intervenir un système auxiliaire de montage en série de deux sous-systèmes disjoints et indépendants dont les ensembles d'éléments T_1' et T_2' sont en bijection avec T_1 et T_2, mais comprennent chacun, pour tout élément initialement dans $T_1 \cap T_2$, l'un des deux nouveaux éléments en lesquels celui-ci a été décomposé.

QUATRIEME ETUDE : La dernière remarque a suggéré une nouvelle idée de généralisation : procéder à des "démultiplications partielles" de certains éléments.

Tâchez de faire un dessin pour cette idée aisément visualisable mais un peu lourde à formaliser . Et il reste vrai qu'on obtient ainsi un système à fiabilité intermédiaire entre celle du système donné et celle du système "totalement démultiplié" associé au résultat précédent.

Nous admettrons que, **dans le cas des systèmes unidimensionnels,** une manière efficace d'exploiter cette idée revient à choisir un entier b entre k et n et à chercher à recouvrir $\{1, \dots, n\}$ par des intervalles de longueur b, $B_1, \dots, B_s$, de sorte que leurs intersections comprennent $k-1$ éléments ; alors la fiabilité du système initial est minorée par le produit des sous-système de même structure (k-consécutifs sur n) associés à ces intervalles.

Exemple d'école : $k = 5$, $n = 15$, $b = 8$; alors $B_1 = \{1, \dots, 8\}$, $B_2 = \{5, \dots, 12\}$, $B_3 = \{9, \dots, 15\}$ (plus court pour ajustement)

Exemple de tableau de minorants de la probabilité de panne dans un système unidimensionnel de type 3-consécutifs sur n, pour des composants indépendants de fiabilité individuelle 0,09 (par convention, la ligne "$b = 1$" donne les minorants au sens de YI-CHIH HSIEH et TA-CHENG CHEN)

minorants de $P_{3,n,p}$ ($p = 0{,}99$)	n= 50	n = 100	n = 500	n = 1000
b = 1	0,9999520	0,9999020	0, 9995021	0,9990022
b = 10	0,9999524	0,9999029	0,9995065	0,9990092
b = 50	0,9999525	0,9999030	0,9995070	0,9990124
b = 100		0,9999930	0,9995070	0,9990124
b = 500			0,9995071	0,9990124
b = 1000				0,9990125

Travail : commenter les valeurs figurant dans ce tableau.

CINQUIEME ETUDE : Retour aux systèmes bi-dimensionnels

Soit un système de type (h, k)-consécutifs sur (m, n). On rappelle que l'ensemble des composants est

$$R_{m,n} = \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$$

et que le système est en panne s'il existe un sous-rectangle, de base de longueur h et hauteur de longueur k tel que tous les composants (i, j) dans ce rectangle sont en panne (on dira qu'un tel rectangle est nul).

Essayer de généraliser dans ce cas l'idée mise en œuvre dans le cas unidimensionnel, qui consiste ici à calculer la probabilité de panne $Q_{h,m;k,n;p}$, en tentant de construire un sous-rectangle nul, de base de longueur h et hauteur de longueur k, colonne par colonne de la gauche vers la droite, en commençant les essais à la première colonne.

Conseil

On peut introduire les notions suivantes :
- colonne : rectangle de la forme $i \times \{1, ..., n\}$,
- sous-colonne : rectangle de la forme $i \times J$, où J est un intervalle dans $\{1, ..., n\}$,
- sous-colonne nulle : $i \times J$ telle que pour tout j dans J, $x_{i,j} = 0$,
- sous-colonne nulle maximale : $i \times J$ nulle telle que, pour tout intervalle J' contenant strictement J, $i \times J'$ n'est pas nulle (ou bien la colonne $i \times \{1, ..., n\}$ elle-même si elle est nulle).

On remarque que, si $n \leq 2k$, il ne peut y avoir dans chaque colonne qu'une seule sous-colonne nulle maximale telle que la longueur de J soit supérieure ou égale à k. Ceci introduit une importante simplification dans la recherche d'un sous-rectangle nul et nous imposerons donc cette contrainte (par symétrie on aurait pu aussi imposer que $m \leq 2h$). *Je tiens le programme (en langage C) réalisant dans ce cas le calcul de $Q_{h,m;k,n;p}$ à la disposition des participants intéressés.*

ET POUR FINIR : JONCTION DES VOIES A ET B

Soit $R_{m,n}$ tel que $m > 2h$ et $n > 2k$, de sorte que l'on ne peut pas effectuer le calcul explicite de $Q_{h,m;k,n;p}$ par la méthode précédente.

Par analogie avec le cas unidimensionnel, on choisit un entier b tel que $b \leq 2k$; en pratique on prendra $b = 2k$ car on a intérêt (voir l'analyse de résultats dans le cas unidimensionnel) à ce qu'il soit le plus grand possible. On recouvre $\{1, ..., n\}$ par des intervalles successifs $B_1, ..., B_s$, tous (sauf éventuellement le dernier) de longueur b, de sorte que leurs intersections comprennent $k-1$ éléments ; alors la fiabilité du système initial est minorée par le produit des fiabilités des sous-systèmes de même structure ((h, k)-consécutifs sur (m, n)) associés aux rectangles $\{1, ..., m\} \times B_t$ (où $1 \leq t \leq s$).

Faire une représentation graphique d'un tel recouvrement.

Je tiens des exemples de calcul de ces minorants à la disposition des participants intéressés.