D. La réciproque du théorème de Pythagore

Romain LANCINI – Collège F. GIROUD de Vincennes (94)
Niveau : 4ème

La démonstration de résultats de cours répond à une attente institutionnelle.

Je vous propose ici, la démonstration de la réciproque du théorème de Pythagore figurant dans les Eléments d'Euclide (livre 1, proposition 48).

Elle permet de réinvestir les notions sur les triangles égaux ainsi que le théorème de Pythagore.

Elle a été proposée après un temps dévolu au travail sur la notion de réciproque à travers des exemples. Cela a été l'occasion de retravailler la notion de contre-exemple pour invalider une proposition ainsi que les démonstrations utilisant des propriétés ou définitions établies pour affirmer qu'une proposition est vraie. Un bilan a été fait. Les élèves ont ensuite énoncé la réciproque du théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore nous donne une condition nécessaire pour qu'un triangle soit rectangle à savoir l'égalité de Pythagore.

L'objectif ici est de démontrer que cette égalité de Pythagore est suffisante pour prouver qu'un triangle est rectangle.

Rappelons un point de vigilance portant sur les conditions nécessaires et les conditions suffisantes puisque des élèves les confondent aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.
Pour la propriété sous forme implicative : « si A alors B », B est une condition nécessaire pour avoir A, c'est à dire qu'il faut B pour avoir A (on dit que B est la conclusion de la propriété) tandis que A est une condition suffisante pour avoir B, c'est-à-dire qu'il suffit d'avoir A pour avoir B (A est la condition d'utilisation de la propriété).

Différentes solutions s'offrent à nous quant à la mise en place effective de cette démonstration.

Le professeur peut certes démontrer à ses élèves la réciproque du théorème de Pythagore, éventuellement en traitant un exemple numérique en amont ou en parallèle (proposition en annexe où les triangles mis en jeu sont séparés contrairement à la version d'Euclide).

Il peut cependant être plus avantageux de faire travailler les élèves sur l'ensemble des six compétences disciplinaires référencées dans le programme.

La suite de l'article se place dans cette dernière optique.

Le travail se décompose en quatre temps.

<u>Temps 1 : Démonstration sur des exemples</u>

Les élèves démontrent que des triangles dont on donne la longueur des trois côtés et vérifiant l'égalité de Pythagore sont des triangles rectangles.

Voici deux types de sujets différenciés.

<u>Sujet de type 1 :</u> Soit ABC un triangle tel que AB = 4,8 cm, AC = 5,5 cm et BC = 7,3 cm. Vérifiez que l'égalité de Pythagore est vraie pour le triangle ABC. Construisez un triangle ABC vérifiant les conditions imposées ci-dessus. Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A. Construire le point D appartenant à droite (d) tel que AD = 4,8 cm et tel que D n'appartienne pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B. Calculez DC. N'oubliez pas de justifier. Démontrez que les triangles ABC et ACD sont égaux. N'oubliez pas d'indiquer les sommets homologues. En déduire que le triangle ABC est un triangle rectangle.
<u>Sujet de type 2 :</u> Soit ABC un triangle tel que AB = 6,5 cm, AC = 7,2 cm et BC = 9,7 cm. Vérifiez que l'égalité de Pythagore est vraie pour le triangle ABC. Construisez un triangle ABC vérifiant les conditions imposées ci-dessus. Tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A. Construire le point D appartenant à droite (d) tel que AD = 6,5 cm et tel que D n'appartienne pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B. Raisonnez sur la figure que vous avez tracée et démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Les sujets doivent différer par les longueurs mises en jeu pour que l'on ait plusieurs triangles vérifiant l'égalité de Pythagore. Ces longueurs proviennent des triplets pythagoriciens appliqués à des coefficients de proportionnalité.

Le sujet de type 1 est somme toute assez classique puisque les questions détaillent le raisonnement. Le sujet de type 2 est, quant à lui, plutôt à un travail de recherche et où les élèves doivent mettre en place une stratégie gagnante en utilisant leurs compétences.

Une lecture commune en classe sur les deux premières questions sera faite et des explications seront apportées pour que chaque élève puisse se mettre au travail.

On peut proposer ce travail aussi bien hors la classe, éventuellement en devoir à la maison, qu'en classe en séance de groupes et pour laquelle des coups de pouces peuvent être donnés.

Les coups de pouces portent aussi bien sur les savoir-faire que sur le raisonnement et se déclineront par des questions, des aides aux tracés, des recherches de rappels de cours ou de rédactions dans les cahiers.
Exemples de coups de pouce :
Comment fait-on pour prouver que deux triangles sont égaux ?
Quels sont les trois cas d'égalité de triangles ?
Avez-vous codé la figure, porté toutes les informations connues sur la figure ?
Que peut-on faire ? Que voyez-vous ?
N'y a t-il pas une configuration dans laquelle vous pouvez appliquer un théorème ?
Que voulez-vous démontrer et comment y parvenir ?

Temps 2 : Constat

Un bilan du premier temps est présenté.

Trace écrite proposée :
« Bilan : Les triangles étudiés vérifiant l'égalité de Pythagore sont rectangles. »

Temps 3 : Conjecture

Une conjecture est une phrase que l'on croit vraie parce que plusieurs exemples la corroborent.
Une conjecture commence par « on dirait que », « il semble que », « je pense que », « je crois que » ...
Il est donc légitime d'émettre la conjecture suivante au regard des exemples traités :

Trace écrite proposée :
« Conjecture : On dirait que si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors il est rectangle. ».

Il existe d'autres triangles vérifiant l'égalité de Pythagore, donnons-en d'autres.
Par exemple, les triangles dont on donne les longueurs, exprimées dans une même unité, des trois côtés sous forme de triplet vérifient aussi l'égalité de Pythagore :
(3,9 ; 8 ; 8,9) ; (3,6 ; 7,7 ; 8,5) ; (4 ; 4,2 ; 5,8) ; (1,1 ; 6 ; 6,1).
Sont-ils aussi rectangles ? Existe-t-il un triangle vérifiant l'égalité de Pythagore qui ne soit pas rectangle ?

Le professeur affirme qu'il n'y a pas de contre-exemple et entame le temps 4 de la démonstration générale reposant sur celle qui a été faite dans le temps 1.

Temps 4 : Démonstration générale

Exposée par le professeur.

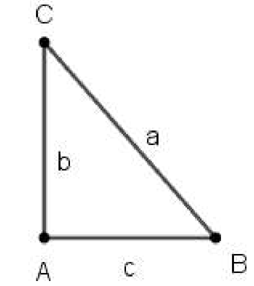
Proposition de trace écrite :

Démonstration dans le cas général

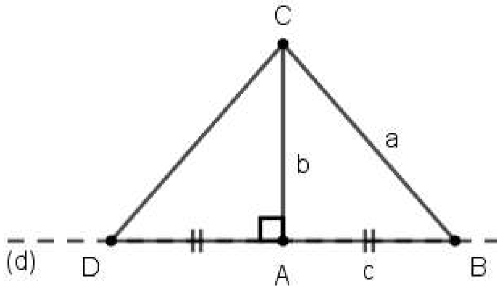
Soit a, b et c trois nombres strictement positifs représentant les longueurs, exprimées dans une même unité, et vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$.

Soit alors ABC un triangle dont les trois côtés [AB], [AC] et [BC] mesurent respectivement c, b et a.

Démontrons que ABC est un triangle rectangle.



Construisons pour cela la droite (d) perpendiculaire à la droite (AC) passant par A puis le point D appartenant à la droite (d) mais n'appartenant pas au demi-plan de frontière (AC) contenant B (pour une meilleure lisibilité).



Le deuxième triangle ADC étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = AC^2 + AD^2 = b^2 + c^2$. Or $b^2 + c^2 = a^2$ d'après l'énoncé, donc $CD^2 = a^2$ donc $CD = a$.

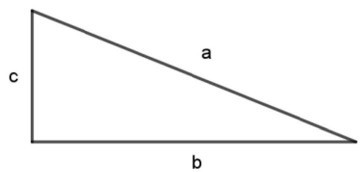
Ainsi, les deux triangles ABC et ADC ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc d'après un cas d'égalité des triangles, les deux triangles sont égaux avec $\begin{cases} A \to A \\ B \to D \\ C \to C \end{cases}$.

Par conséquent, comme le triangle ACD est rectangle, le triangle ABC l'est aussi.

C.Q.F.D.

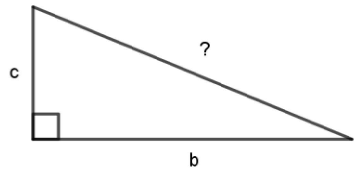
ANNEXE

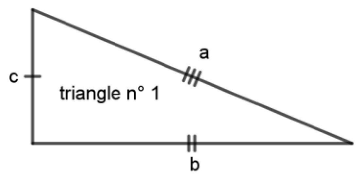
<table>
<tr><th><u>Démonstration dans un cas particulier</u></th><th><u>Démonstration dans le cas général</u></th></tr>
<tr><td>
<u>Vérifier que $13^2 = 12^2 + 5^2$</u>
D'une part, $13^2 = 13 \times 13 = 169$
D'autre part, $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
Donc l'égalité $13^2 = 12^2 + 5^2$ est bien vraie.

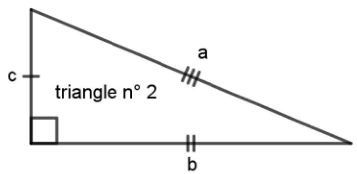
Considérons un triangle ABC dont les côtés [BC], [AB] et [AC] mesurent respectivement 13 cm, 12 cm et 5 cm.
</td><td>
Soit a, b et c trois nombres strictement positifs représentant les longueurs, exprimées dans une même unité, des côtés d'un triangle et vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$.


Démontrons que ce triangle est rectangle.
</td></tr>
<tr><td>
Démontrons que ABC est un triangle rectangle.

Considérons un autre triangle A'B'C' rectangle en A' tel que A'B' = 12 cm et A'C' = 5 cm.

<u>Calculons B'C'</u>
A'B'C' est rectangle en A' donc d'après le théorème de Pythagore,
$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$.
$B'C'^2 = (12\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2 = 169\text{ cm}^2$
Donc $B'C' = \sqrt{169\text{ cm}^2} = 13$ cm.
<u>Démontrons que ABC et A'B'C' sont égaux.</u>
On a AB = A'B', AC = A'C' et BC = B'C' ;
Or, deux triangles ayant leurs trois côtés respectivement de même longueur sont égaux ;
Donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux avec
$\begin{cases} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B'. \\ C \rightarrow C' \end{cases}$
<u>Concluons.</u>
Par conséquent, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et comme $\widehat{A'} = 90°$, $\widehat{A} = 90°$. C.Q.F.D.
</td><td>
Pour arriver au but, considérons un deuxième triangle qui est rectangle et dont les côtés de l'angle droit mesurent c et b.


Ce deuxième triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore, le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme $b^2 + c^2$ qui elle-même est égale à a^2 d'après l'énoncé.
Par conséquent, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à a^2 donc la longueur de l'hypoténuse est égale à a.
Ainsi, nous avons deux triangles tels que :




Les deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc d'après un cas d'égalité des triangles, les deux triangles sont égaux.
Par conséquent, comme le deuxième triangle est rectangle alors le premier l'est aussi. C.Q.F.D.
</td></tr>
</table>