B. Différenciation dans la conjecture d'un résultat

Julie CARRY - Collège République de Bobigny (93)
Niveau : 3ème
Durée : 3 séances

Un travail sur la différentiation dans la conjecture a été conduit dans une classe de troisième d'un collège de niveau assez faible. Le nombre d'heures données pour l'accompagnement est variable selon les classes.
Le but de cet article est de faire comprendre comment dans un même exercice, nous pouvons mener un travail pédagogique différencié tout en initiant les élèves à la démonstration. Nous n'aurons pas les mêmes contenus ni les mêmes attentes de productions pour tous les élèves. Ce sont ces différents axes que nous allons essayer de dégager en priorité tout en gardant un objectif à atteindre pour l'ensemble de la classe. Les élèves n'ont pas le droit à la calculatrice durant toute l'activité.

Nous avons choisi de travailler sur l'énoncé de tâche intermédiaire suivant.
« Quel est le plus petit nombre possédant exactement 5 diviseurs ? »

Référence / lien sur le site Eduscol
http://cache.media.education.gouv.fr/file/Arithmetique/65/3/RA16_C4_MATH_arithm_petit_nombre_547653.pdf

Compétences travaillées : chercher, représenter, raisonner, calculer.

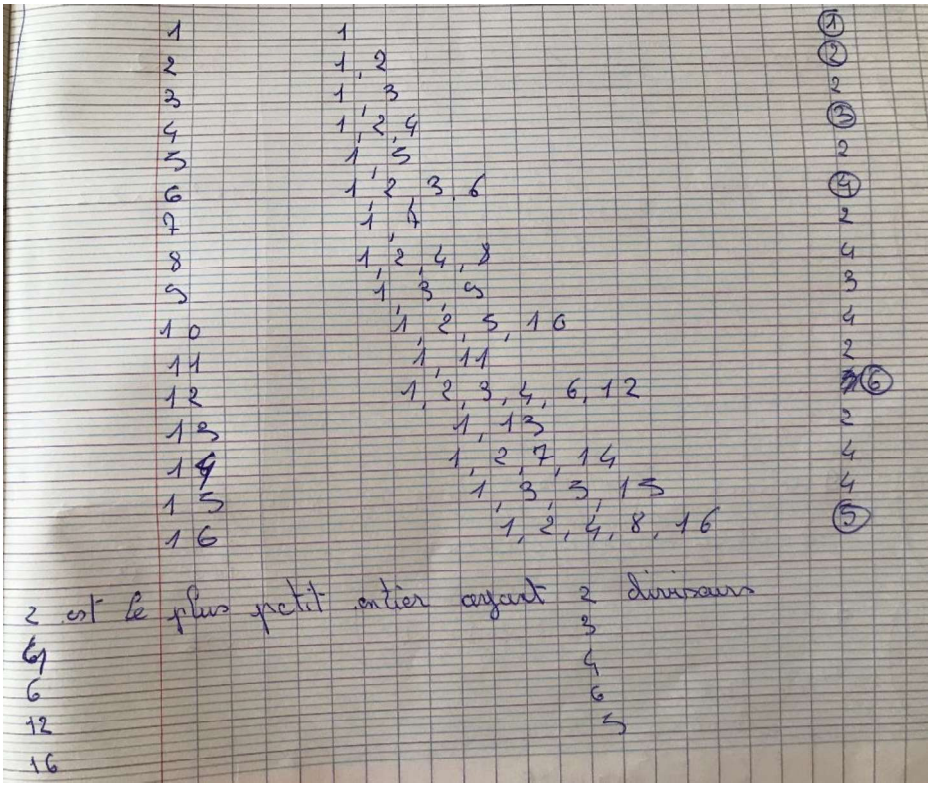
Nous avons distingué trois temps que l'on suppose faire avec tous les élèves afin qu'ils répondent au mieux à l'exercice.

Premier temps : Démarche par essais/ajustements

Durée : 40 minutes

Nous avons demandé à chaque élève de réfléchir de manière individuelle à des pistes possibles pour répondre à cette interrogation.
Aux plus lents durant la phase de recherche, nous avons donné comme sous tâche la consigne suivante : « étudier le nombre de diviseurs des premiers entiers ». Nous avons alors fait le bilan professeur/élève qui a fait ressortir que pour trouver cette liste de diviseurs, il faut faire des divisions euclidiennes. Cela nous a permis de revoir les critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 9. Toujours pour les élèves qui en avaient besoin, nous avons posé plusieurs questions pour les mettre sur la piste. Nous leur avons demandé si l'on doit tester tous les nombres entiers comme diviseur. A partir de quel nombre on commence ? Et à partir de quel nombre on s'arrête ?
Nous avons particulièrement insisté sur cette étape puisqu'il est nécessaire pour la suite que celle-ci soit comprise par tous les élèves.
Très vite, plusieurs élèves ont trouvé la réponse. Nous leur avons alors demandé de faire de même en trouvant le plus petit nombre entier qui a 2, 3, 4 et 6 diviseurs.

Premier temps : Démarche par essais/ajustements	
Attendus	• Multiples et diviseurs. • Déterminer si un nombre entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier. • Notion de nombres premiers. • Recherche individuelle.
Processus Différenciation simultanée (Activités différentes pour les élèves désignés par l'enseignant)	• Consigne : Trouver le plus petit entier qui a exactement 5 diviseurs. • Sous-tâche : Etudier le nombre de diviseurs des premiers entiers. • Questions/Réponses entre professeur/élève.
Productions	• Cibler l'objectif principal à atteindre : Liste juste des diviseurs des 16 premiers entiers • Répondre à la question du plus petit entier ayant 2 diviseurs, 3 diviseurs, 4 diviseurs, 5 diviseurs et 6 diviseurs. • L'élaboration voire la description argumentée d'une stratégie de résolution comme l'exploitation de la décomposition de nombres entiers en produits de facteurs premiers, par exemple.



Ci-contre, nous pouvons voir une rédaction d'élève qui a une bonne maîtrise de l'exercice. Nous lui demandons alors une rédaction argumentée avec la décomposition de nombres entiers en produits de facteurs premiers.

Un bilan collectif à l'écrit a été mené avec la classe en fin d'heure.
Comment doit être le reste de ces divisions pour que le nombre testé soit un diviseur du nombre choisi au départ ? Quel est le plus petit entier ayant exactement 2 diviseurs ? 3 diviseurs ? 4 diviseurs ? Etc.

Deuxième temps : Travail de recherche

Durée : 1 heure

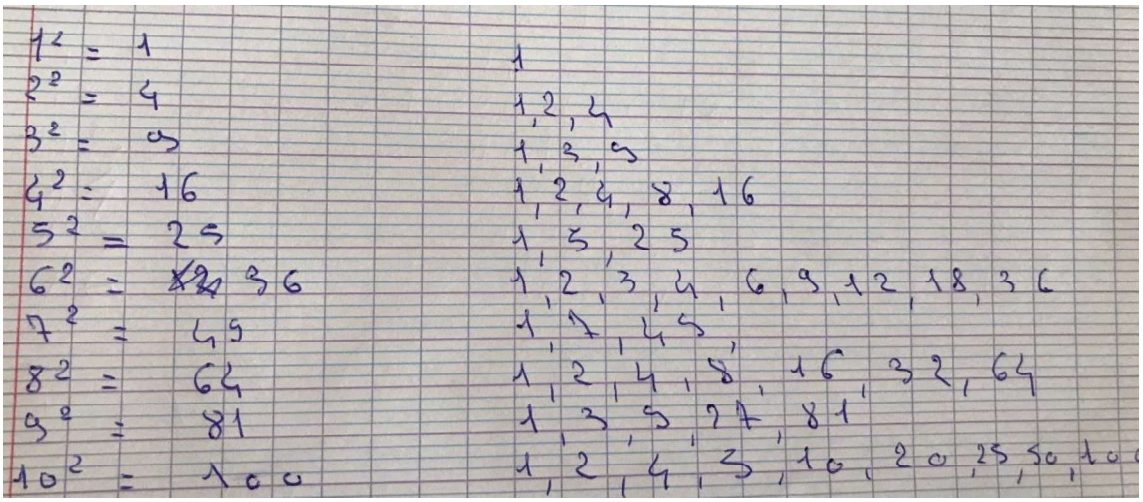
Ce travail peut se traiter hors la classe et/ou en classe. Nous avons demandé aux élèves de réfléchir à la maison au plus petit nombre possédant exactement un nombre impair donné de diviseurs. La tâche est alors devenue une prise d'initiative pour laquelle il faut imaginer des pistes de solutions. Comme aide, nous leur avons suggéré d'écrire pour commencer la liste des diviseurs de tous les premiers entiers.

C'est un travail de groupe qui s'est alors déroulé à la suite du premier temps d'appropriation et de recherche individuelle à la maison. Les groupes étaient formés de 4 élèves composés des deux binômes de classe composés d'un élève moteur et d'un élève avec plus de difficultés. Les groupes étaient donc hétérogènes. Ils livrèrent alors leurs différentes pistes trouvées à la maison.

Dans cette partie, nous avons proposé aux élèves trois développements possibles en supposant qu'il fallait les guider vers ces conjectures. Le but était de montrer comment mener certains raisonnements par induction. Le plus important était toute la phase de recherche et de production de la preuve et non le formalisme de cette preuve.

1. Piste des carrés

Les élèves avaient pour la plupart tous écrit la liste des diviseurs des 50 premiers entiers. Ce travail était à notre grande satisfaction très bien fait. Les élèves ont semblé prendre facilement part à ces calculs pourtant très répétitifs.
Pour aider les groupes bloqués, nous leur avons proposé d'entourer tous les nombres qui ont un nombre impair de diviseurs.
Certains ont trouvé par induction la piste suivante : « Seuls les carrés ont un nombre impair de diviseurs. ». Passer du raisonnement inductif au déductif par la preuve a été ensuite compliqué.

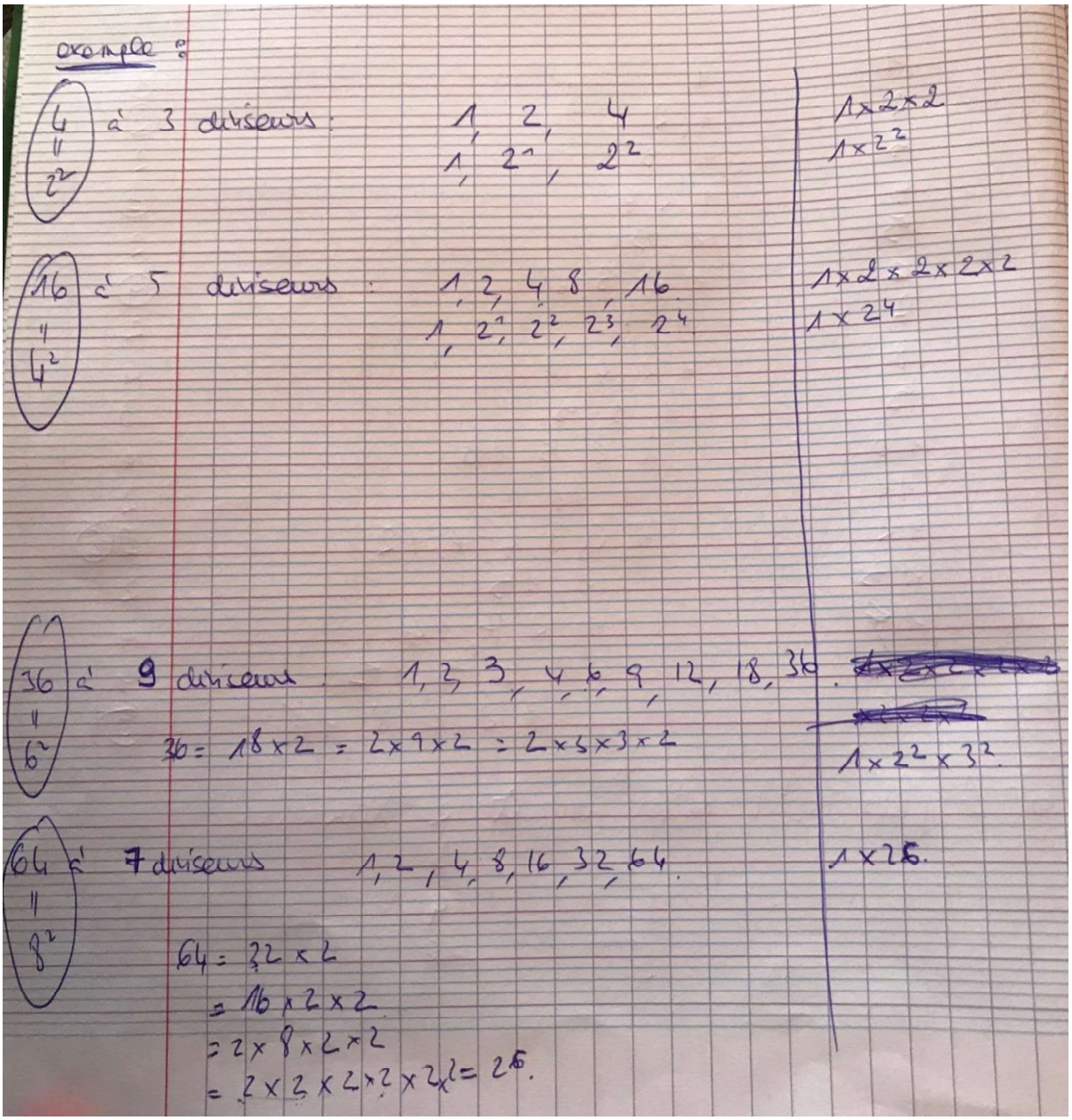


Nombre	Liste des Diviseurs
Diviseur de 1	1
Diviseurs de 2	1,2
Diviseurs de 3	1,3
Diviseurs de 4	1,2,4
Diviseurs de 5	1,5
Diviseurs de 6	1,2,3,6
Diviseurs de 7	1,7
Diviseurs de 8	1,2,4,8
Diviseurs de 21	1,3,7,21
Diviseurs de 22	1,2,11,22
Diviseurs de 23	1,23
Diviseurs de 24	1,2,3,4,6,8,12,24
Diviseurs de 25	1,5,25
Diviseurs de 26	1,2,13,26
Diviseurs de 27	1,3,9,27
Diviseurs de 28	1,2,4,7,14,28
Diviseurs de 29	1,29

2. Exposants pairs des facteurs premiers

D'autres ont été plus loin après avoir été guidés pour conjecturer une caractérisation des nombres entiers ayant un nombre impair de diviseurs. Aucun facteur premier de leur décomposition en produit de facteurs premiers ne peut y figurer avec un exposant impair.

Voici une aide possible pour guider les élèves vers cette piste :
« Ecrire la décomposition en facteurs premiers des entiers en s'aidant des puissances ».



3. Pour aller plus loin…

Nous n'avons pas eu le temps d'aller aussi loin en classe mais il serait intéressant de travailler avec les élèves la formule qui donne le nombre de diviseurs de chaque entier connaissant sa décomposition en facteurs premiers.

Deuxième temps : Travail sur l'erreur	
Attendus	• Travail de recherche hors la classe. • Recherche collective ou en groupe d'entraide. • Différenciation par les rôles dans le groupe. • Prise d'initiative dans la recherche de la consigne posée. • Décomposition en produit de facteurs premiers. • Notion de parité.
Processus Différenciation par la tâche / les procédés (Plusieurs solutions et procédures valables)	• Consigne : le plus petit nombre possédant un nombre impair de diviseurs. • Sous-tâche : écrire la liste de tous les diviseurs des premiers entiers. • Entourer tous les nombres qui ont un nombre impair de diviseurs. • Ecrire la décomposition en facteurs premiers. • Favoriser les échanges d'idées et d'opinions.
Productions (Permettre des productions variées à divers niveaux de difficulté)	• Liste des diviseurs des 50 premiers entiers correcte • Seuls les carrés ont un nombre impair de diviseurs • Exposant pairs des facteurs premiers • Formule qui donne le nombre de diviseurs de chaque entier.

Un bilan collectif à l'oral a été mené avec la classe en fin d'heure.
Chacun a présenté sa démarche : formuler des hypothèses face à une situation problème, choisir une hypothèse et inventer une expérience qui permettra de la vérifier, réaliser l'expérience, confronter le résultat à l'hypothèse de départ, confirmer et faire une synthèse ou choisir une nouvelle hypothèse.

Troisième temps : Approfondissement

Durée : 1 heure

Nous avons demandé aux élèves en séance d'accompagnement personnalisé (demi-classe) de créer un algorithme permettant de donner la liste et le nombre de diviseurs d'un entier donné. Chaque élève avait un ordinateur à disposition.

Nous considérons ici une classe qui utilise le logiciel scratch une fois par semaine. Les notions de base sont connues. Autrement, le travail de l'académie de Reims aurait été pertinent. Il propose des fiches pour les enseignants et les élèves.

https://pedagogie.ac-reims.fr/index.php/mathematiques-c4/enseigner-maths-c4/item/3577-liste-des-diviseurs

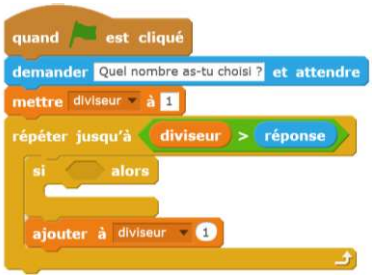
Nous avons collectivement décidé de commencer la séance par un rappel de ce que nous avons fait en classe les heures précédentes. Nous avons revu la définition de la division euclidienne et notamment le fait que le diviseur doit être plus petit que le nombre choisi. Nous avons rappelé que notre but est de créer un programme qui donne la liste des diviseurs d'un nombre. Nous n'avions jamais vu l'utilisation des listes sur scratch. Cette activité a été l'occasion de découvrir cette nouvelle notion.

Nous avons écrit au tableau comment créer une liste. Il faut aller dans « données », puis « créer une liste ». Cette notion est très intuitive. Les élèves n'ont eu aucun souci à comprendre la notion de liste. Ce qui leur a posé plus de problèmes c'est de créer seuls les variables « réponse » et « diviseur ». Les élèves ont très rapidement pensé à demander le nombre choisi pour rechercher sa liste de diviseurs. Nous avions fait deux programmes calculant l'aire et le périmètre d'un rectangle juste avant. Beaucoup ont oublié de cocher la réponse et se sont retrouvés bloqués. Il était important de revenir à la définition de la division euclidienne. Qui est le diviseur ? Qui est réponse ? Le reste ?

Le professeur et les élèves se sont accordés sur le fait que si le reste de la division euclidienne est égal à 0, cela signifie que le nombre par lequel on a divisé est un diviseur du nombre choisi au départ. Il faut donc ajouter ce nombre à la liste des diviseurs. Dans « opérateurs »,les élèves ont tous immédiatement sauté sur le signe « divisé » jusqu'à ce qu'ils se rendent compte qu'il ne donne pas le reste de la division euclidienne mais le quotient. Nous leur avons alors indiqué le bloc « modulo ».

modulo renvoie le reste de la division euclidienne de réponse par diviseur.

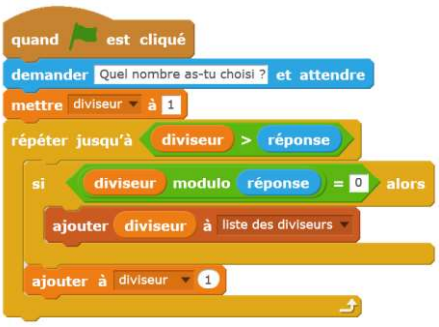
Que se passe-t-il quand le reste vaut 0 ? Et dans le cas contraire ?



Aucun souci pour demander le nombre étudié, noter que la condition d'arrêt est que le diviseur doit être plus grand que la réponse (une fois cochée) et créer la variable diviseur pour la plupart des élèves avec le rappel fait collectivement en classe.

Quelle est la plus petite valeur que doit prendre le diviseur ?

Notion de « répéter jusqu'à » à voir selon les élèves. Le programme va diviser par 1, 2, 3, 4… et ainsi de suite jusqu'au nombre de départ.



Notion de modulo
Si le reste vaut 0, cela signifie quoi ?
Que se passe-t-il dans le cas contraire ?

Il est possible de demander à ceux qui ont bien compris d'améliorer le programme en remarquant par exemple que la liste ne s'efface pas même lorsque l'on prend un autre nombre.

- Le programme commence par supprimer la dernière liste de diviseurs.
- Il faut alors ajouter la boucle « répéter indéfiniment ».

On pourrait également aller plus loin en demandant aux élèves de modifier l'algorithme afin de savoir si le nombre choisi au départ est un nombre premier ou non. Nous n'avons pas eu le temps d'aller jusque-là. Seuls deux élèves sur la classe entière ont atteint le stade avancé de la recherche d'un algorithme plus développé.

Troisième temps : Approfondissement	
Attendus	• Recherche collective : tous les élèves peuvent rendre compte de leurs compréhensions sous différentes formes : tableaux, présentation orale…
Processus	• Logiciel scratch
Productions	• Programme simple. • Programme amélioré avec la ligne 1 et 2. • Rajouter si le nombre est premier ou non.