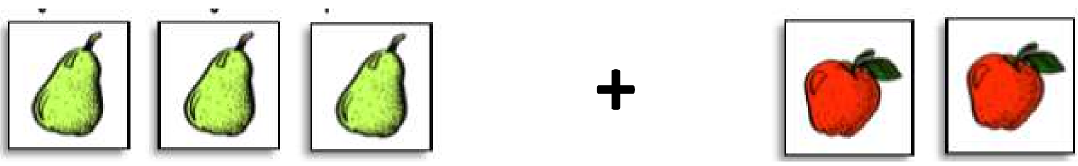
E. Des pommes et des poires ?

Alberto AHUMADA
Collège Roger MARTIN DU GARD, 93 Epinay-sur-Seine
Niveau : 4ème – 3ème



Contexte et prérequis

Il s'agit de deux séquences proposées en classe de 3ème sur la réduction d'expressions littérales. La première séquence porte sur la réduction de produits et la seconde sur la réduction de sommes algébriques.

Il est courant d'entendre dans certaines classes que le discours tenu pour expliquer que l'expression littérale $5x^2 + 6x$ ne se réduit pas, est : « on n'additionne pas des pommes et des poires ! ».

L'objectif de cet article est donc de proposer des exemples d'activités à proposer aux élèves permettant de raisonner, de mobiliser des arguments mathématiques solides et de faire le lien avec les propriétés algébriques en vue de réduire des expressions littérales.

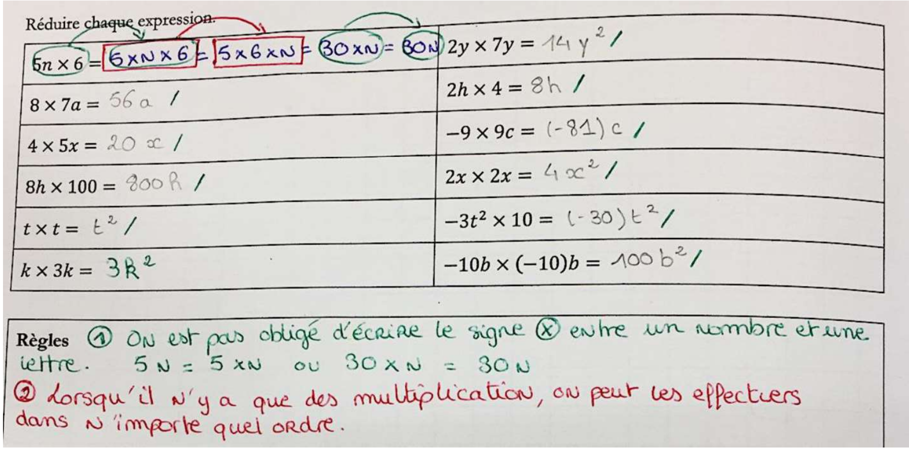
En amont de ce travail, les élèves ont travaillé sur :
- Le rappel des priorités opératoires et l' identification de la structure d'une expression (somme, différence, produit) ;
- La production d'expressions littérales dans des contextes variés (à partir d'un programme de calcul, du périmètre ou de l'aire d'une figure, etc.) ;
- la propriété de distributivité simple dans le sens développer et le sens factoriser sur des exemples simples ;
- le fait de vérifier si une égalité est vraie pour toute valeur de x.

Séquence n°1 : réduction de produits

Cette séquence s'est déroulée sur une séance de 55 minutes et est constituée de deux étapes.

Dans un premier temps, il s'agit de rappeler aux élèves les règles ou les conventions permettant de réduire une expression littérale sous forme de produit. Dans un second temps, les élèves mettent en application ces conventions dans un exercice d'entraînement.

Activité n°1 : réduire un produit, prise en main.


Réduire chaque expression.

$5n \times 6 = \boxed{6 \times n \times 6} = \boxed{5 \times 6 \times n} = 30 \times n = 30n$	$2y \times 7y =$ 14 y^2 /
$8 \times 7a =$ 56 a /	$2h \times 4 =$ 8h /
$4 \times 5x =$ 20 x /	$-9 \times 9c =$ (−81) c /
$8h \times 100 =$ 800 h /	$2x \times 2x =$ 4 x^2 /
$t \times t =$ t^2 /	$-3t^2 \times 10 =$ (−30) t^2 /
$k \times 3k =$ 3 k^2	$-10b \times (-10)b =$ 100 b^2 /

Règles ① On est pas obligé d'écrire le signe ⊗ entre un nombre et une lettre. 5 n = 5 x n ou 30 x n = 30 n

② Lorsqu'il n'y a que des multiplication, on peut les effectuers dans n'importe quel ordre.

L'énoncé est distribué aux élèves, ils ont 5 minutes pour essayer de le compléter seuls. L'enseignant circule dans les rangs pour prendre de l'information sur les procédures des élèves et les réponses proposées.

Deux profils d'élèves se sont alors distingués : la majorité des élèves a réussi à réduire les expressions proposées mais sans être capable d'expliquer leurs résultats, les arguments avancés étaient du type « j'ai multiplié 5 par 6 et j'ai rajouté le n » pour le premier exemple et une minorité d'élèves n'a pas réussi à s'engager dans la réduction.

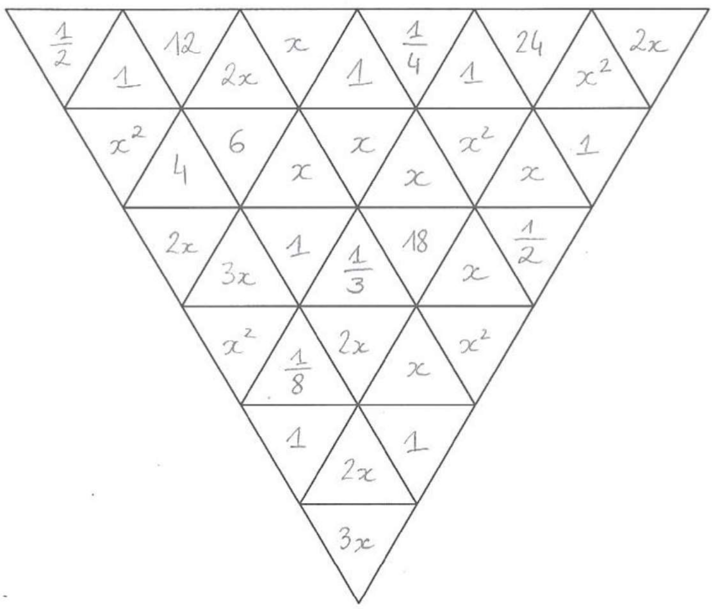
Un temps de synthèse est alors proposé pour faire quelques rappels. En réalité, pour réduire l'expression littérale $5n \times 6$ en $30n$, on mobilise :

- une convention d'écriture : il n'est pas obligatoire d'écrire le signe $\times$ entre un nombre et une lettre ;
- une propriété algébrique : la commutativité de la multiplication.

Il est alors indiqué aux élèves que s'ils n'arrivent pas à réduire le produit proposé, ils doivent détailler les étapes de travail souvent implicites.

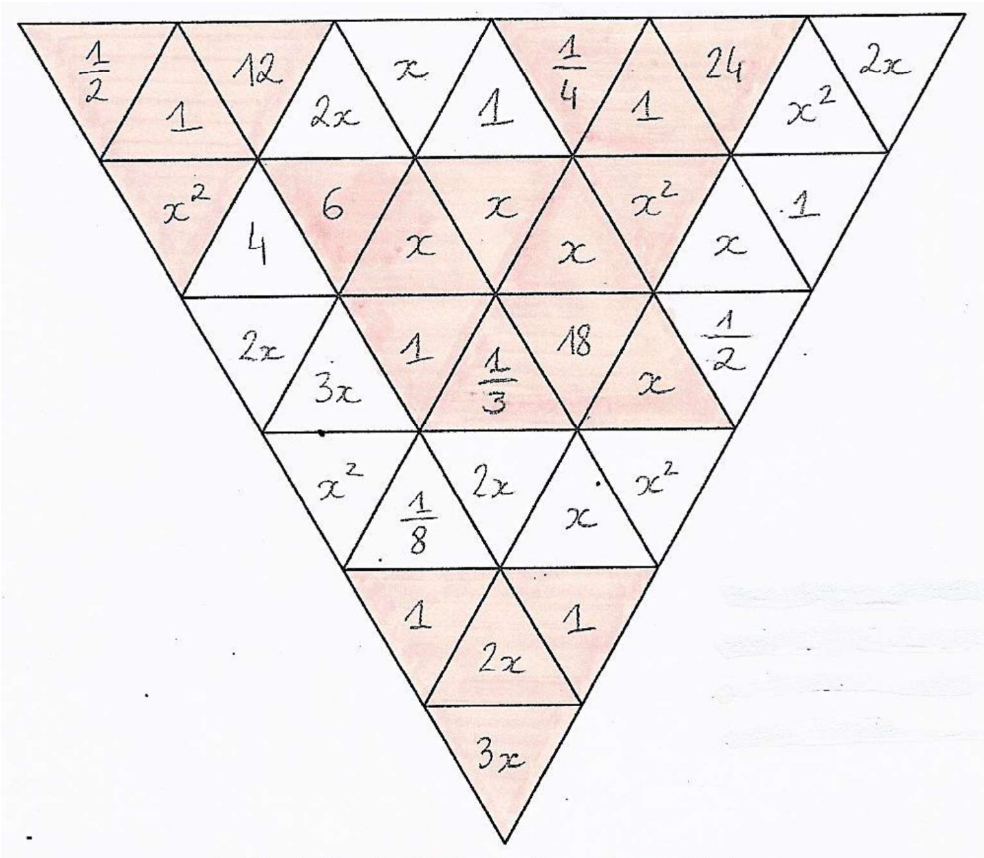
Activité n°2 : TeTratri

Trouver 5 triangles formés de quatre petits triangles dont le produit des nombres qui les composent est égal à $6x^2$.



Adaptation tirée de la brochure « *APMEP Jeux 10* ».

Il s’agit dans cet exercice de mettre en application les règles permettant de réduire un produit. C’est également une excellente occasion de travailler le calcul numérique et d’élaborer des stratégies efficaces pour retrouver les triangles en question. Voici le travail attendu.

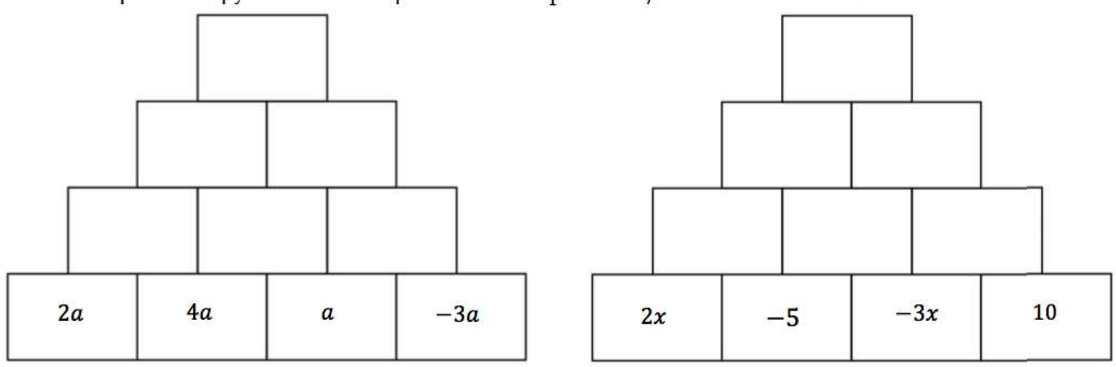


Séquence n°2 : réduction de sommes

Cette séquence s’est déroulée sur deux séances de 55 minutes et est constituée de trois activités. La première a pour objectif de rappeler aux élèves les techniques permettant de réduire une expression littérale sous forme de somme et de leur donner les moyens de contrôler leurs éventuelles erreurs. Les activités suivantes sont des exercices d’entraînement de difficulté progressive.

Activité n°1 : réduire une somme, prise en main.

Sauras-tu compléter ces pyramides ? Chaque case se complète en ajoutant les nombres des deux cases en-dessous...



L'énoncé est distribué aux élèves qui ont 5 minutes pour tenter de compléter la première pyramide. L'enseignant circule activement dans la classe pour repérer les procédures de ses élèves en veillant à ce que ces derniers produisent le plus d'expressions possible, mêmes fausses.

Trois profils d'élèves se sont alors distingués. Dans le premier groupe, on trouve les élèves qui prétendent que « $2a + 4a = 6a$ » sans pour autant être capables d'expliquer pourquoi. Dans le deuxième groupe, on trouve les élèves qui proposent « $2a + 4a = 6a^2$ ». Enfin, un troisième groupe d'élèves qui ne proposent aucune expression littérale.

L'enseignant propose alors d'examiner au tableau les propositions qui sont faites. Revenons sur la proposition « $2a + 4a = 6a^2$ ». Quels arguments mobiliser pour expliquer cette erreur ?

Premier argument : il est fort probable que cette erreur soit due à un raisonnement analogue, mais faux, du travail mené sur la réduction de produit. L'élève ne donne pas de sens aux opérations mises en jeu dans l'expression littérale, et ne voit pas que dans l'expression « $2a + 4a$ » il n'y pas « $a \times a$ ».

Deuxième argument : s'appuyer sur le travail mené sur les égalités vraies ou fausses. Il convient donc de mener quelques essais numériques pour tester cette égalité.

	$2a + 4a$	$=$	$6a^2$
$x = 1$	$2\times1 + 4\times1$ $= 2 + 4$ $= \boxed{6}$	$=$	6×1^2 $= \boxed{6}$
$x = 10$	$2\times10 + 4\times10$ $= 20 + 40$ $= \boxed{60}$	$\neq$	6×10^2 $= 6\times100$ $= \boxed{600}$

Bilan : L'égalité est VRAIE pour $x = 1$, mais pas pour $x = 10$. Elle n'est donc PAS VRAIE pour toute valeur de x, donc $2a + 4a \neq 6a^2$.

L'enseignant revient ensuite sur la procédure juste, en y apportant des éléments de justifications.

Je suis un expert de l'addition répétée :	Je suis un expert de la factorisation :
$= 2\times a + 4\times a$ $= \underbrace{a+a+a+a+a+a}$ $= 6\times a$ $= 6a$	$2\times a + 4\times a$ $K = a$ $a\times K + b\times K$ $a = 2$ $= a\times(2+4)$ $b = 4$ $K\times(a+b)$ $= a\times 6$ $= 6a$

On peut donc mobiliser deux arguments (qui sont finalement les mêmes), l'un consistant à faire appel à l'addition itérée, l'autre consistant à mobiliser la propriété de distributivité simple pour factoriser et réduire l'expression « $2a + 4a$ ».

Une fois ce travail mené, compléter le reste de la pyramide de gauche n'a pas posé de problème majeur. Il a toutefois été nécessaire de rappeler la convention d'écriture « $a = 1 \times a$ ».

Pour la pyramide de droite, un travail similaire a été mené. Les élèves ont disposé de 5 minutes pour tenter de compléter les cases vides. Un premier temps de synthèse collectif est proposé pour statuer sur les différentes procédures des élèves, procédures qui se sont toutes révélées incorrectes.

proposition n° 1 : $2x + (-5) = -3x$

proposition n° 2 : $2x + (-5) = -7x$

proposition n° 3 : $2x + (-5) = 3x$

proposition n° 4 : $2x + (-5) = -10x$

Chaque procédure peut être réfutée à l'aide de deux arguments mathématiques. L'un basé sur quelques essais numériques qui vont venir prouver que ces égalités ne sont pas vraies pour toute valeur de x et donc qu'elles sont mathématiquement fausses. L'autre argument est basé sur la structure de l'expression littérale et l'ordre des opérations à effectuer. Voici un exemple de discours qui peut être tenu sur la procédure n°1 :

proposition n°1 :

	$2x + (-5)$		$-3x$
$x = 1$	$2 \times 1 + (-5)$ $= 2 + (-5)$ $= -3$	$=$	-3×1 $= -3$
$x = 3$	$2 \times 3 + (-5)$ $= 6 + (-5)$ $= +1$	$\neq$	-3×3 $= -9$

Bilan : Cette égalité n'est PAS VRAIE pour toute valeur de x, donc $2x + (-5) \neq -3x$.

Autre explication : $2x + (-5)$

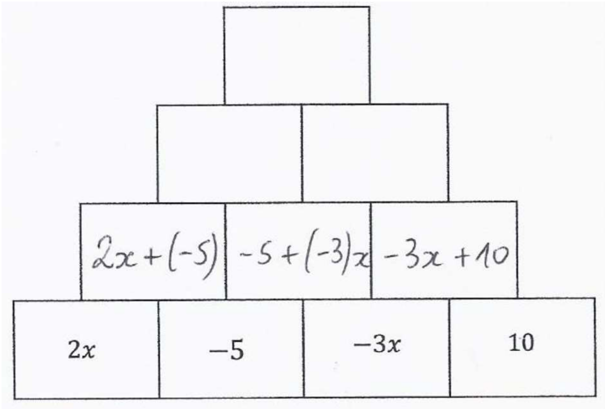
$= 2 \underset{①}{\times} x \underset{②}{+} (-5)$

La multiplication est prioritaire devant l'addition, on ne peut donc pas commencer par calculer $2 + (-5)$!

A l'issue de cette phase, aucune des propositions n'étant juste et les élèves n'ayant aucune nouvelle expression à proposer, l'enseignant intervient pour formuler le bilan :

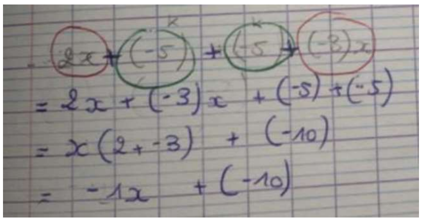
L'expression littérale : $2x + (-5)$ ne se réduit pas, elle est déjà RÉDUITE !

Le deuxième étage de la pyramide a donc été complété très rapidement ensuite, puisqu'il s'agissait d'écrire la somme (déjà réduite) des deux expressions figurant au niveau inférieur.



Pour les étages supérieurs de la pyramide de droite, un nouveau temps de recherche a été laissé aux élèves, environ 10 minutes, pour faire de nouvelles propositions. La difficulté nouvelle réside dans la longueur des expressions à réduire.

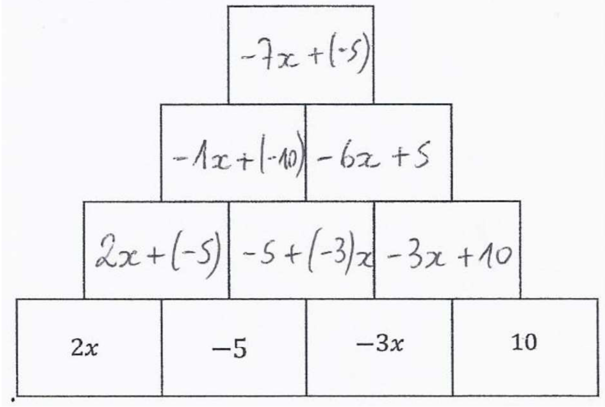
Les élèves sont conscients qu'ils ne pourront pas réduire n'importe quels termes entre eux, au regard de l'analyse menée précédemment. Ils se souviennent que l'addition est une opération commutative et associative, ils échangent alors l'ordre des termes pour réduire les « termes en x » et les termes numériques, selon le schéma suivant :

	Dans l'expression, on identifie les termes en x et les termes numériques.
	On utilise les propriétés de l'addition pour regrouper les termes de même nature.
	On réduit 2x + (-3)x à l'aide du travail mené sur la pyramide de gauche et on calcule la partie numérique.

Certains élèves auront encore envie d'écrire que « $-1x + (-10) = -11x$ » comme étape finale. Ils mobilisent aussi des arguments du type « $-11x$ » c'est un résultat alors que « $-1x + (-10)$ » non.

Il est normal à ce stade de l'apprentissage de voir apparaître encore régulièrement ce type d'erreurs. Il convient à l'enseignant de les accepter et surtout de mobiliser le même discours que celui présenté à l'étape précédente pour les réfuter. On peut aussi rappeler qu'il ne s'agit pas d'un travail de calcul (et donc on n'attend pas un résultat final en tant que tel) mais d'un travail de transformations d'expressions littérales.

Les élèves terminent donc par compléter la pyramide de droite et l'enseignant peut récapituler les règles et conventions mobilisées.



Règles

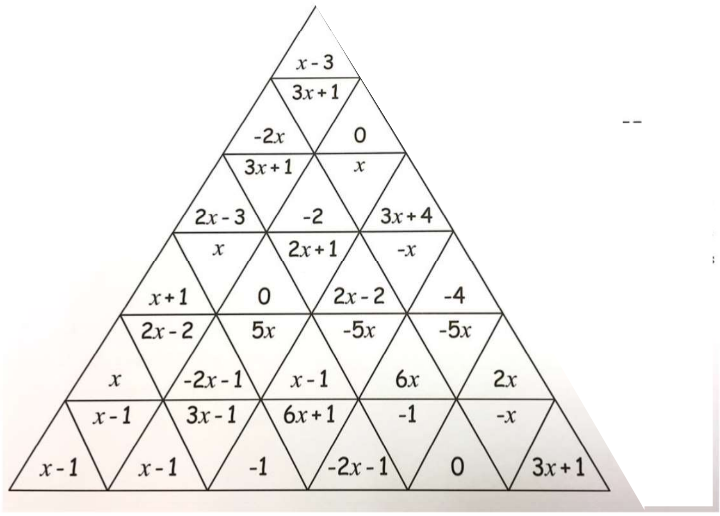
- $a = 1 \times a$ et $-a = -1 \times a$
- L'expression $2x + (-5)$ est déjà RÉDUITE ! à cause des priorités opératoires ⊗1 et ⊕2. On n'ajoutera donc pas des termes qui ne sont pas de même famille.
- Lorsqu'il n'y a que des additions, on peut les effectuer dans l'ordre que l'on veut.

Activité n°2 : exercices d'entraînement.

Une série de 2 exercices a été proposée aux élèves (prévoir des exercices supplémentaires pour les élèves les plus avancés).

Exercice n°1 : TetraTri.

Trouver 4 triangles formés de quatre petits triangles dont la somme des expressions qui les composent est égale à $-3x+1$.



Exercice tiré de la brochure « *APMEP Jeux 10* ».

Exercice n°2 : l'exercice du comptable.

Le principe est le suivant : l'extrémité de chaque flèche indique la somme de la ligne ou de la colonne correspondante.
Compléter sachant que x représente un nombre quelconque.

						↑
	$2x-8$	$-2x-5$	$-9x-2$	$-3+4x$	→	
	$-7+3x$	$-5x+4$	$12x-6$	$1-6x$	→	
	↓	↓	↓	↓		
←						

Exercice tiré de la brochure « *Des Maths ensemble et pour chacun – 4ème* ».

Pour cet exercice, il conviendra de rappeler aux élèves que « $2x-8 = 2x+(-8)$ » et de faire noter dans les cahiers que *soustraire un nombre, c'est lui ajouter son opposé*.