

# Le rulpidon, rond et carré, une forme étonnante !

Clotilde Fermanian Kammerer

Université Paris-Est Créteil & Institut Henri Poincaré

Semaine des Mathématiques 2022

Académie de Créteil

11 mars 2021

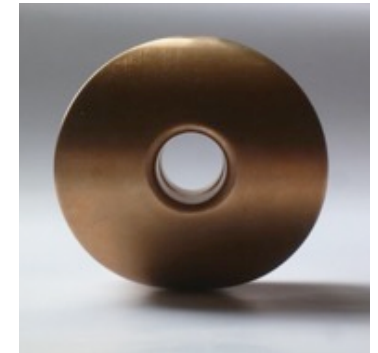


# Connaissez-vous le Rulpidon ?

Créé en 2018 par le sculpteur [Ulysse Lacoste](#),  
c'est l'emblème de la future [Maison Poincaré](#) qui ouvrira ses portes en 2023.



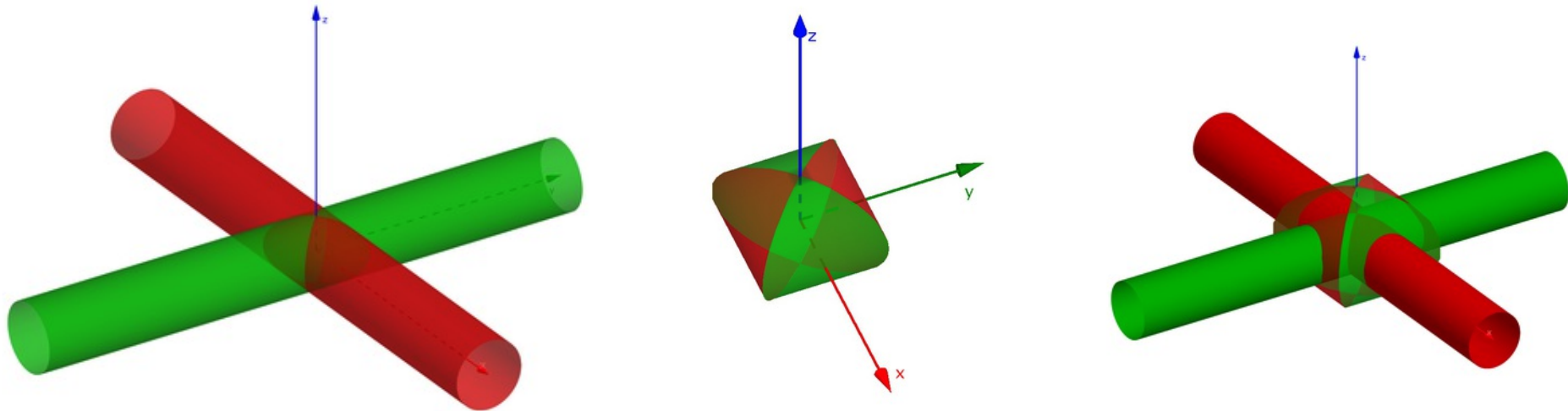
le Rulpidon est à la fois  
rond et carré :



© Photo Ulysse Lacoste

# Géométrie du Rulpidon ?

Géométriquement, c'est l'interpénétration perpendiculaire de deux cylindres de même diamètre.



C'est un solide de Steinmetz évidé.



© Photo Ulysse Lacoste

c'est un objet de **dimension 3**  
... il a une ombre,  
... il a du volume !

# La dimension 1, 2 & 3

Notions reliées :



# La dimension 1, 2 & 3

Plusieurs mots :

Droite

Dimension 1

Plan

Dimension 3

Surface

Espace

Aire

Dimension 2

Longueur

Volume

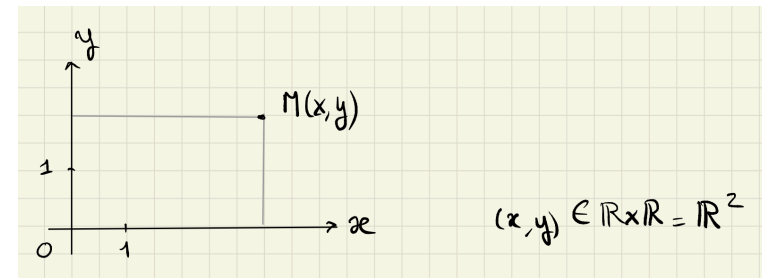
Ligne

# La dimension 1, 2 & 3

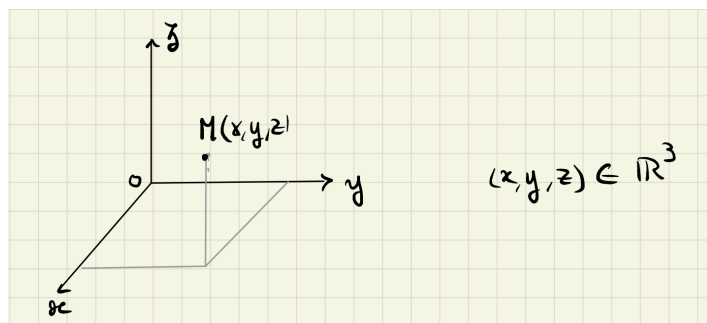
Dimension 1 : Longueur - Droite



Dimension 2 : Surface - Plan



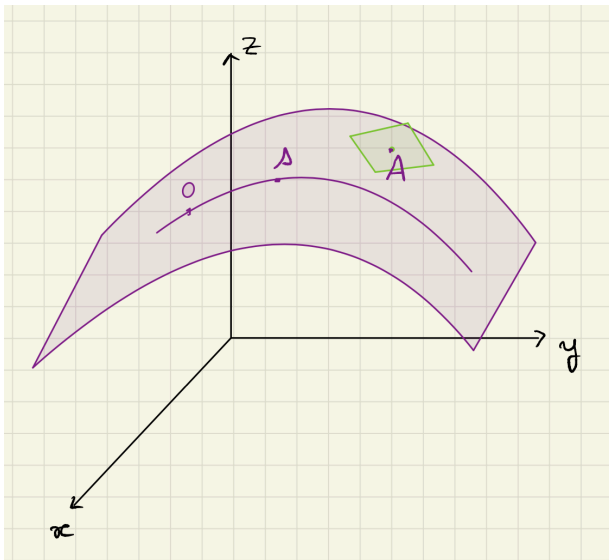
Dimension 3 : Volume - Espace



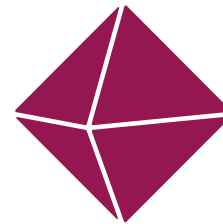
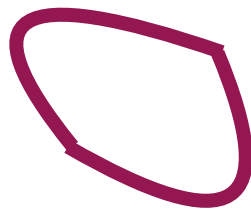
On représente l'objet  
avec 1, 2 ou 3 paramètres.

# La dimension 1, 2 & 3 ...

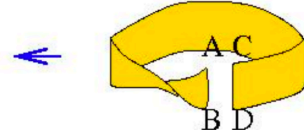
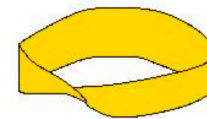
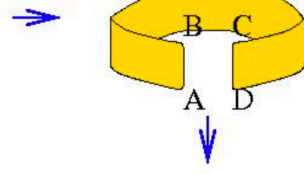
Courbes et surfaces, des objets de dim 1 et 2 ...



... des objets parfois 'fermés'...



... et parfois 'fermés' bizarrement  
comme le ruban de Möbius



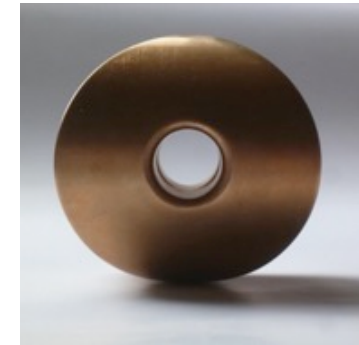
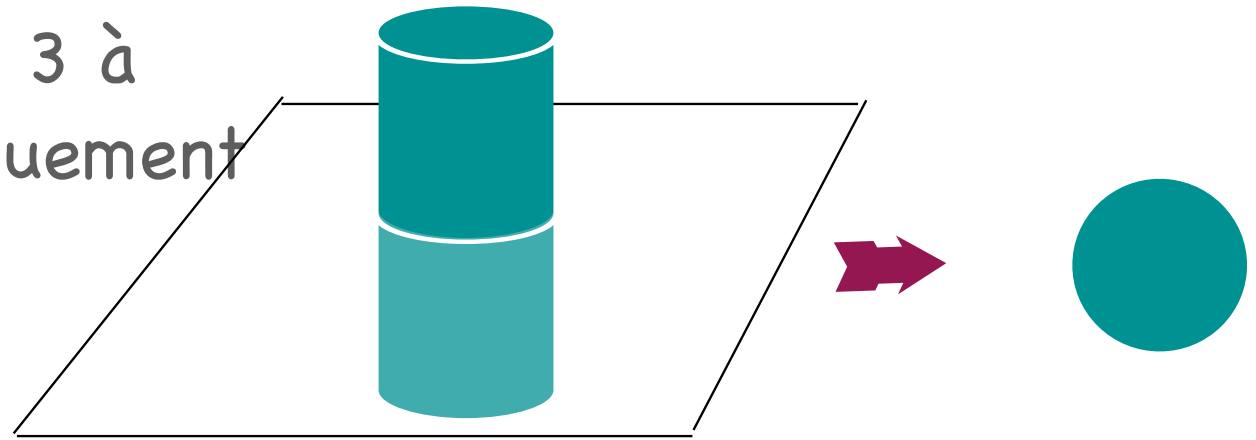
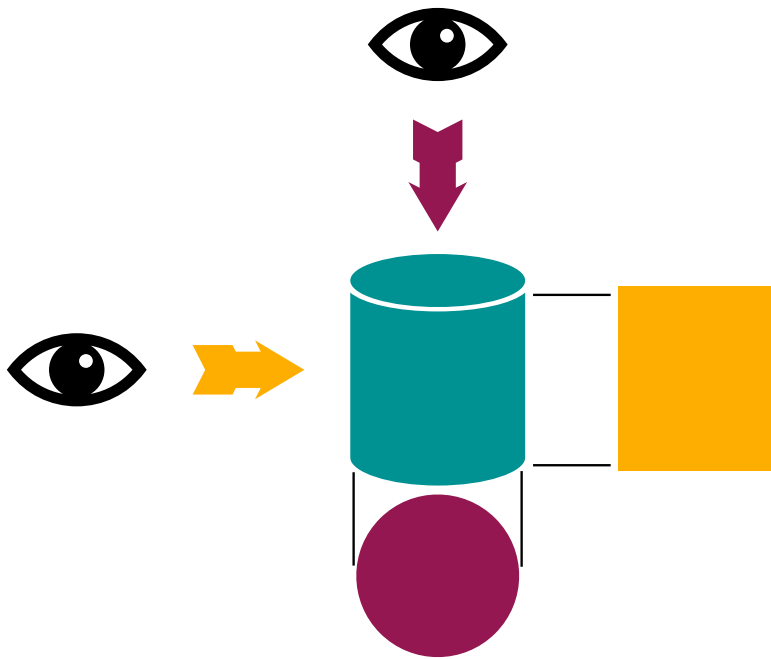
©Patrick Popescu-Pampu

➔ L'espace de dimension 1 est inclus dans l'espace à 2 dimensions,  
l'espace à 2 dimensions dans celui à 3 dimensions,...

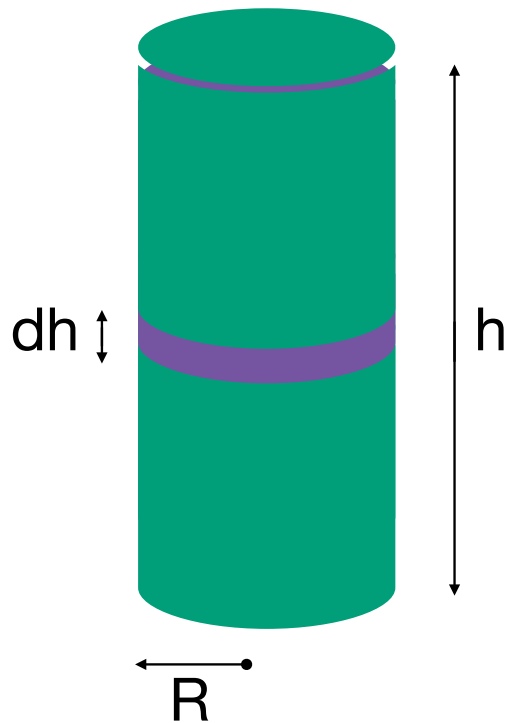


# Section, projection

Passer de la dimension 3 à la dimension 2 et réciproquement



# Calculer des volumes



On comprend le cylindre comme la superposition de petits disques très plats, des disques d'épaisseur infinitésimale 'dh' qui, par leur nombre, contribuent à la hauteur h.

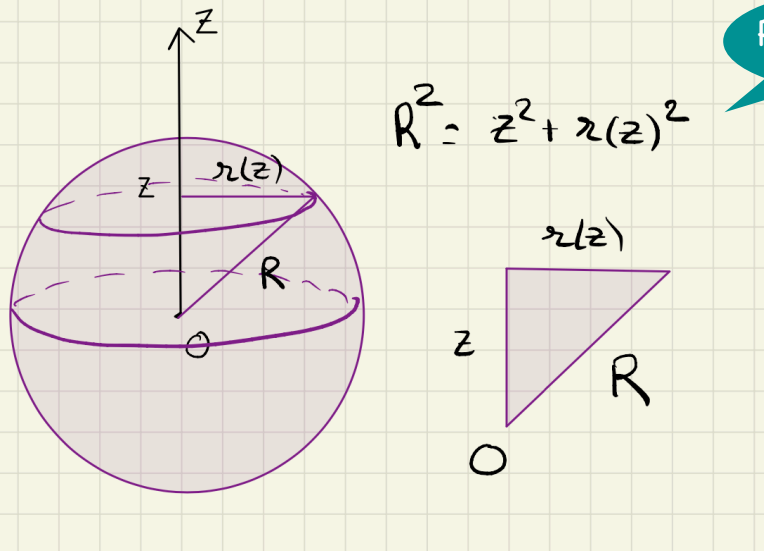
Volume du cylindre = Hauteur X Aire du cercle

$$V = (\pi R^2) \times h$$

**Remarque :** le calcul infinitésimal est dû à **Newton** et **Leibniz** au 17<sup>ième</sup> siècle. Il développe des travaux de **Fermat** et donne naissance au calcul différentiel et intégral.

# Volume de la sphère

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Pythagore !

$$R^2 = z^2 + r(z)^2$$

On voit la **sphère** comme la superposition de petits cercles très plats de rayon  $r(z)$  et d'épaisseur infinitésimale ' $dz$ '.

Volume = 2 x ('somme' pour  $z$  allant de 0 à  $R$  de  $\pi r(z)^2$ )

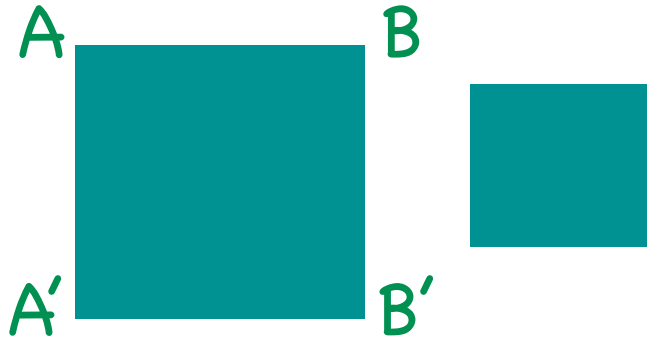
$$= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Remarque :  $\int_0^R (R^2 - z^2) dz = \frac{2}{3}R^3$

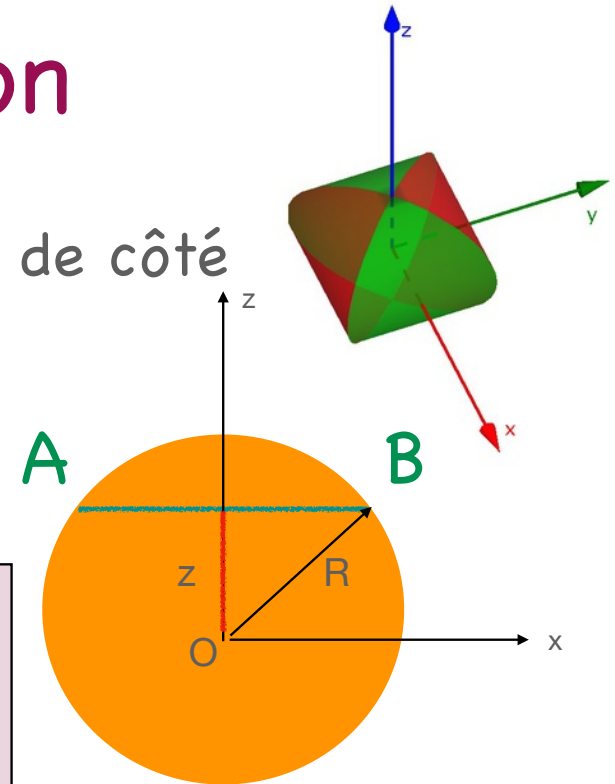
# Le volume du Rulpidon

Volume de **Steinmetz** : Les sections sont des carrés de côté

$$AB = 2 \sqrt{R^2 - z^2}$$



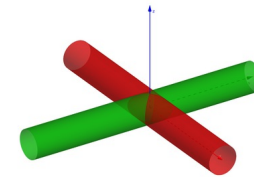
$$V_S = 2 \int_0^R 4(R^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} R^3$$



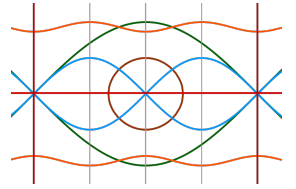
Volume du **bicylindre** :

2 x (Vol. cylindre de rayon r et de hauteur 2R) - Vol. d'un Steinmetz de rayon r

$$V_b = 4\pi Rr^2 - \frac{16}{3}r^3$$



# Le volume du Rulpidon



On **approche** (par défaut !) le volume par celui du volume de Steinmetz moins celui des cylindres retirés

Soit **R** le rayon du grand cylindre  
**r** le rayon du petit cylindre

R et r sont  
les paramètres  
du problème

$$V(r, R) \sim \frac{16}{3}R^3 - 4\pi Rr^2 + \frac{16}{3}r^3$$

**Remarque :** La valeur exacte du volume du Rulpidon fait intervenir des intégrales elliptiques.



# Analyse de données



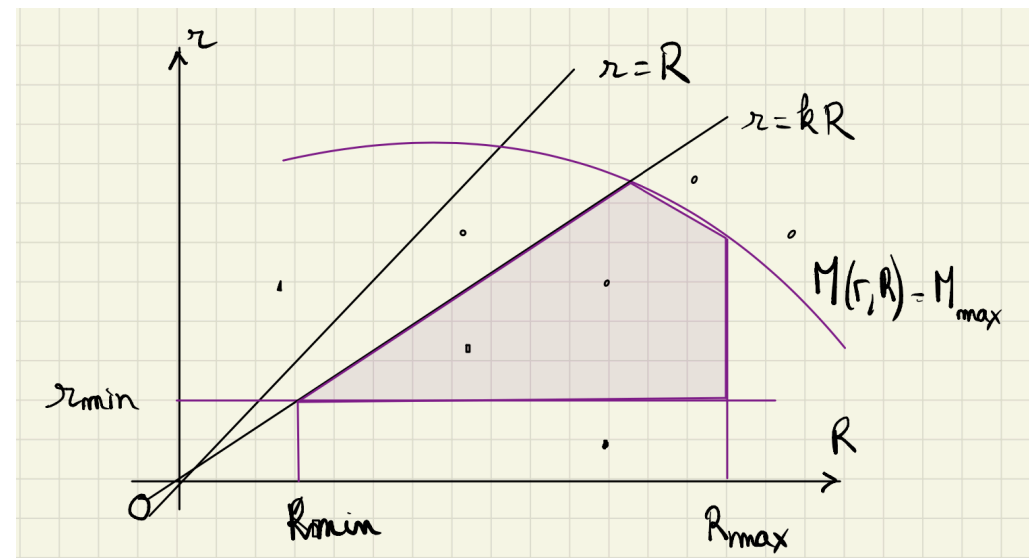
© Photo Ulysse Lacoste

Fig 1 : fichier excel

matière	R	r	volume	masse volumique	masse Rulpidon
plastique	0,018	0,009	0,00001668	850	0,01
bronze	0,100	0,033	0,0041	8400	34,76
bronze	0,100	0,025	0,0046	8400	38,91
acier	1,800	0,900	16,68	7500	125096

Et si l'on construisait des rulpidons pour les aires de jeu !

Fig 2 : représentation graphique



# Qu'avons nous fait ?

## 1- Modélisation

- Observation
- Choix des paramètres  $r$  et  $R$

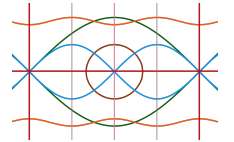
## 2- Analyse mathématique

- Calcul du volume - Approximation
- Analyse des données - Construction d'outils d'Aide à la décision

## 3- Quels problèmes ?

- Santé - économie - technologie
- Mathématiques

# Au-delà de la dimension 3 !



Et si l'on rajoutait des paramètres ?

Par exemple le temps :  $(x, y, z, t)$

On arrive dans l'espace à 4 dimensions !

Projection :  $(x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z)$

Certains problèmes ont besoin d'un grand nombre de paramètres pour être décrit !

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

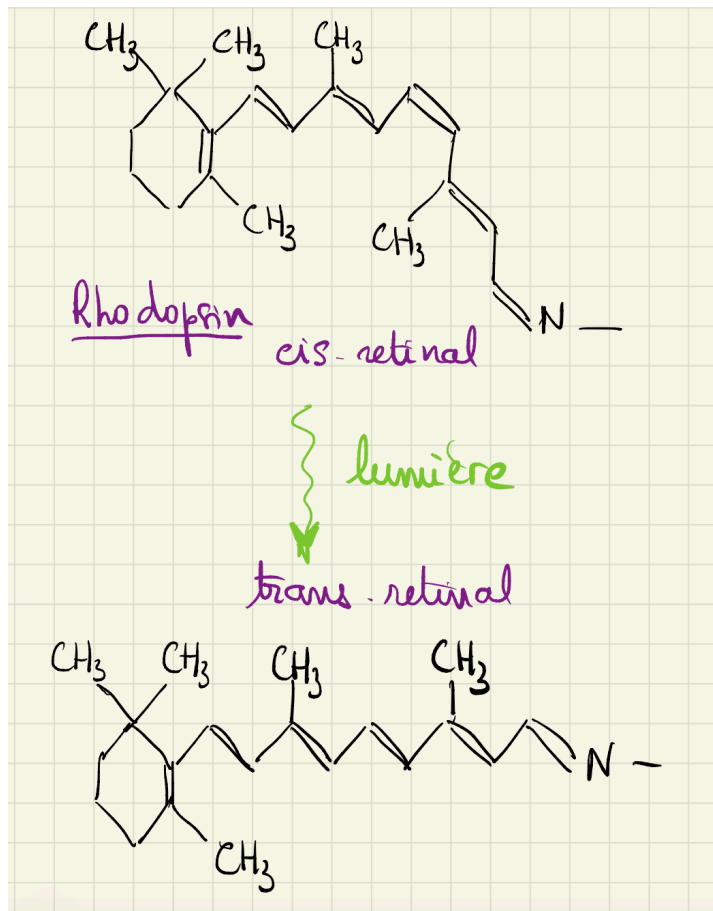


© Photo Ulysse Lacoste



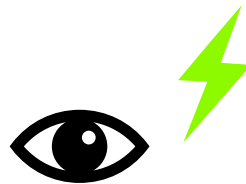
# La « malédiction de la dimension »

## Modélisation et molécules – la Rhodopzine



La **Rhodopzine** joue un rôle dans le processus de la vision.

George Wald - prix Nobel de Médecine et Physiologie en 1967



Plus d'une quarantaine d'atomes !  
Plus d'une centaine de paramètres !

# Modélisation en chimie quantique

Les transitions entre différentes configurations sont responsables de propriétés fines des matériaux.

Mécanique  
Quantique !

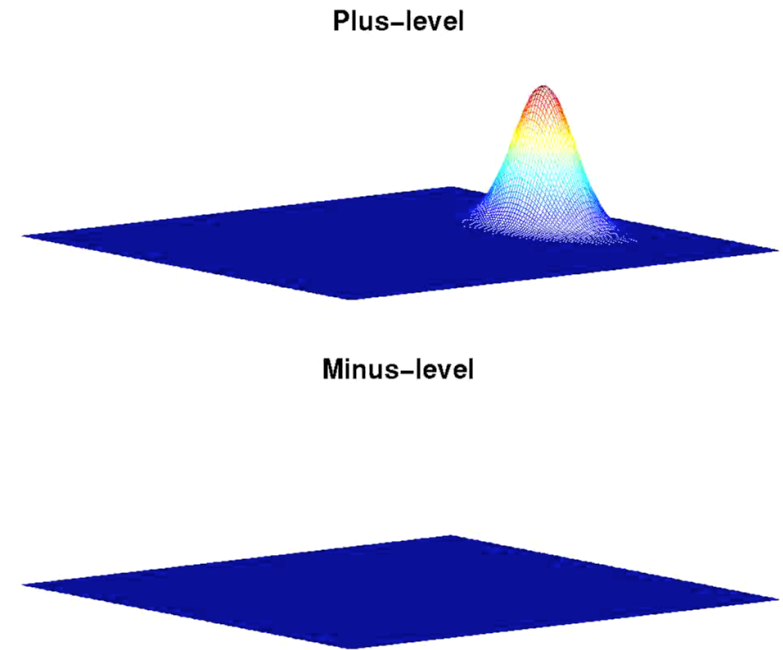
L'équation de Schrödinger

$$i\partial_t\psi = H\psi$$

$$\psi = \psi(t, q), \quad q \in \mathbb{R}^{3N}$$

$|\psi(t, q)|^2$  est une densité de probabilité :

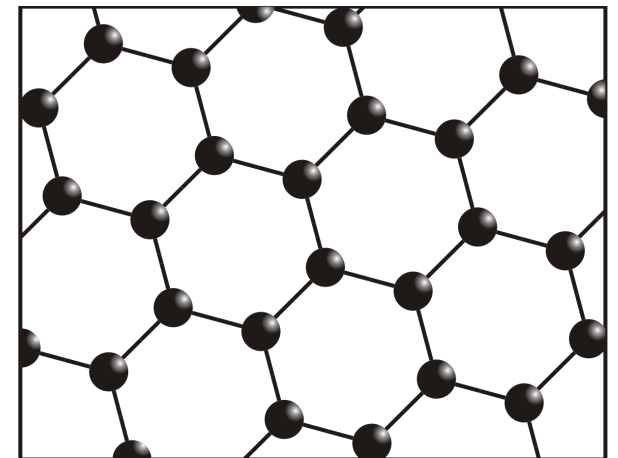
➡ quelle proportion des molécules se trouve dans telle ou telle configuration ?



# Les matériaux organiques

## Le Graphene

- Andre Geim et Konstantin Novosolov  
Prix Nobel de Physique 2010
- Stockage de l'énergie, très bon conducteur  
→ photovoltaïque, ordinateur quantique



Sujet très important aujourd'hui à l'interface entre physique théorique, mathématique et chimie quantique.

# Qu'avons nous fait ?

## 1- Modélisation



Choix des **paramètres**, dimension du problème analysé

## 2- Analyse mathématique - **Approximation** - analyse des données

→ Aide à la décision

**Difficulté** : la grande dimension

calculs numériques

représentations  
des données

# Les 'big datas'

0- Collecte de données sur le web  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

1- Modélisation Données de très très grande dimension  
Pas d'équation !

2- Analyse mathématique

- Statistique - Intelligence artificielle
- Réseaux de neurones -> fonctions servant à la
- Apprentissage (learnings) séparation des données

Aide à la décision - quelle publicité et à qui ?

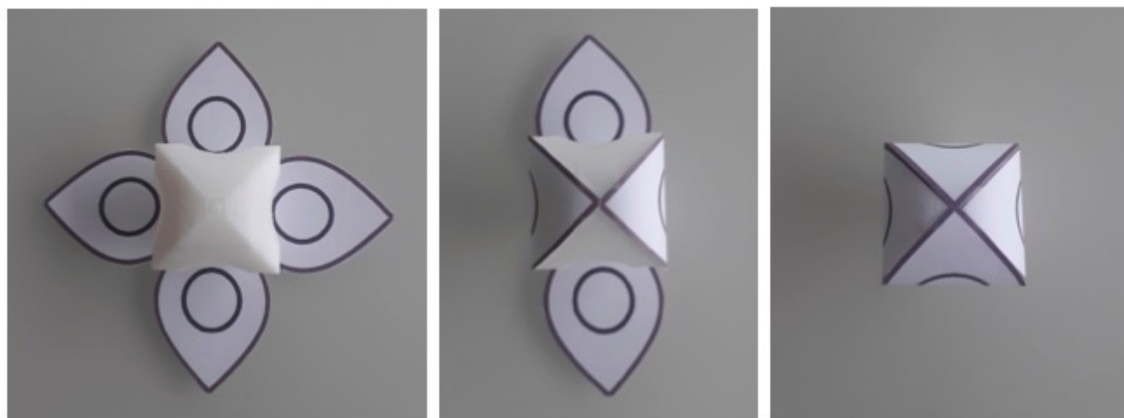


Beaucoup de questions mathématiques ouvertes !  
Mais aussi éthiques !

# Merci pour votre attention !

Pour aller plus loin:

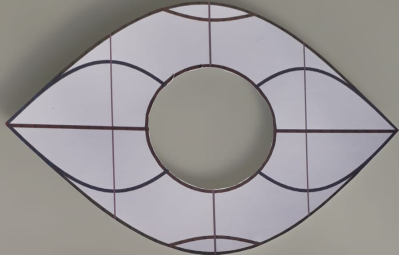
- Le film **Dimensions** <http://www.dimensions-math.org/>
- Un article de **Sylvie Benzoni** consacré au Rulpidon sur le site **Images des Maths** <https://images.math.cnrs.fr/>
- Fabriquez votre rulpidon !



© Photo Sylvie Benzoni

# Construire son Rulpidon

4x



2x

