Atelier Spécialité maths

université d'été 2012

Graphes probabilistes
Urnes de Ehrenfest

Présentation, algorithmes, calcul formel

La forme des programmes

Pour la partie obligatoire :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires

Pour la spécialité :

Exemples de problèmes	Contenus

À mettre en avant :

- étudier des modélisations
- placer l'élève en position de recherche

Première partie du programme : arithmétique

Deuxième partie du programme : Matrices et suites

Il s’agit d’étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l’aide de suites ou de matrices.

On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Matrice et suites
le programme

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation …ation de

Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient.

Prérequis : calcul matriciel

- Somme, produit de matrices, puissances de matrices, notion de matrice inverse ,
- On trouvera une introduction aux matrices , et aux graphes dans :

- le document d'accompagnement pour la spécialité en Terminale ES (ancien programme)
- le document ressource 2012 pour la spécialité mathématiques en Terminale S ,

Urnes de Ehrenfest
plan

1. Introduction aux graphes probabilistes : illustration sur le modèle S.I.R.

2. Les urnes de Ehrenfest
   - modélisation et algorithmes
   - retours à l'état initial
   - recherches des états stables. Calcul formel

1. Introduction aux graphes probabilistes : Propagation de maladies, modèle S.I.R.

Dans une population un individu est susceptible de contracter une certaine maladie.

Il peut être dans un des trois états :

- S : Susceptible : il peut tomber malade
- I : Infecté : il a la maladie
- R : Retiré : il est immunisé .

Graphes probabilistes, modèle S.I.R.

Ces états sont **temporaires,** l'individu peut changer d'état. Supposons que son état puisse changer tous les trois mois selon les probabilités :

- **S'il est immunisé (état R),** il peut le rester avec une probabilité de 0,9, ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1.

- **S'il est dans l'état S,** il peut le rester avec une probabilité de 0,6, ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,3 , ou encore à l'état R avec une probabilité de 0,1 (par vaccination naturelle, par exemple)

- **S'il est dans l'état I,** il peut le rester avec une probabilité de 0, 05 ou passer à l'état R avec une probabilité de 0,95

Graphes probabilistes – Modèle S.I.R

Exemple de questions :

Si un individu est susceptible aujourd'hui, dans quel état sera-t-il dans trois mois ? Dans 9 mois?

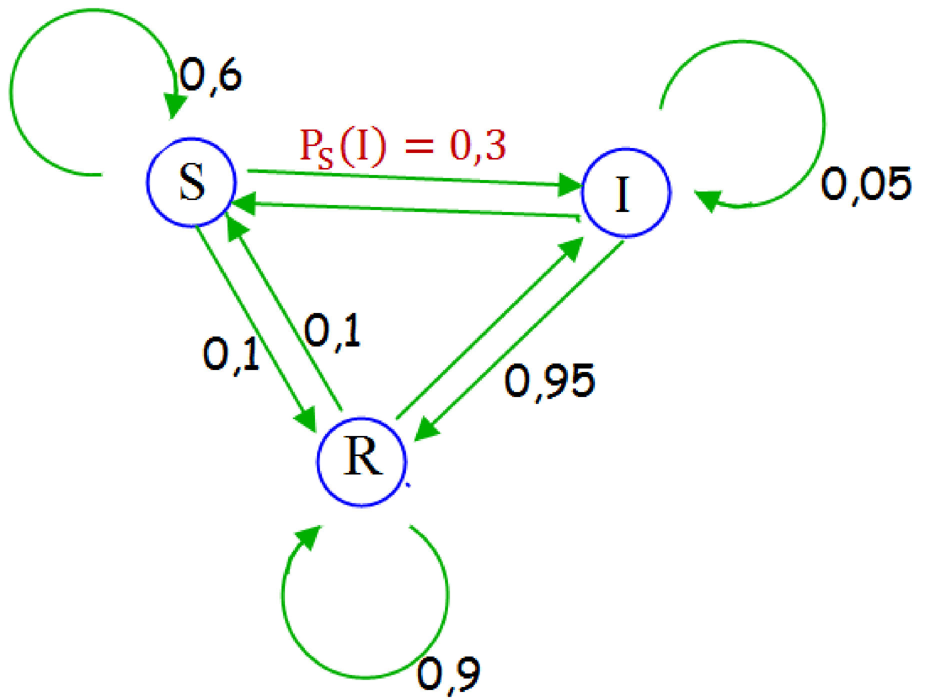
Que peut-on prévoir à long terme pour cet individu ?

Interprétation statistique :

On étudie les états d'une population de 10 millions d'habitants : quel nombre d'individus peut-on prévoir dans chaque état, après une longue période ?

Graphes probabilistes, modèle S.I.R

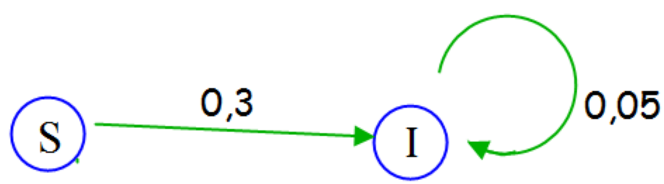
On peut résumer les données à l'aide d'un graphe :



Les branches portent des probabilités conditionnelles

Un peu de vocabulaire

- Ce graphe possède trois **sommets** S, I et R
- Ces sommets sont reliés par des **arcs** (arêtes orientées), certains de ces arcs sont des **boucles**, ils relient le sommet à lui-même. Au plus un arc relie un sommet à un autre.
- Ce graphe est **valué** : les arcs portent des <u>probabilités conditionnelles</u> :



$P_S(\mathrm{I}) = 0,3$

La somme des probabilités conditionnelles issues d'un sommet vaut 1

Suite de variables aléatoires, état probabiliste, matrice de transition

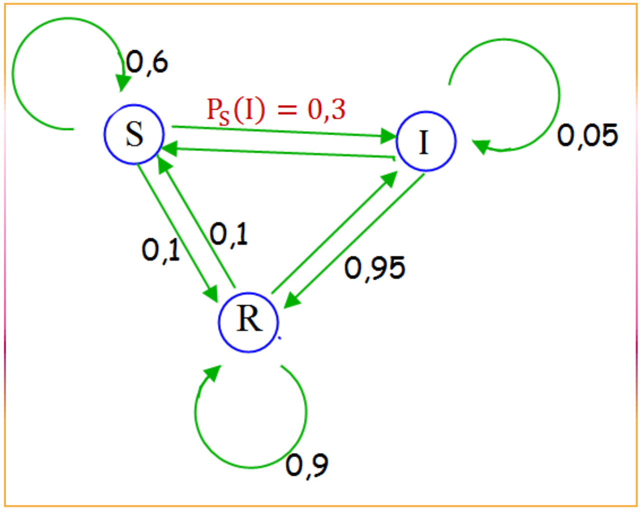
Plus généralement, si l'expérience aléatoire présente N issues possibles $S_1, S_2, \ldots, S_N$ (autrement dit le graphe possède N sommets),

On définit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ donnant l'état de l'individu à l'étape n :

La loi de probabilité de X_n est appelée **un état probabiliste** :

X_n	S_1	S_2	...	...	...	...	...	...	S_N
$P(X_n = \mathrm{S_i})$	$p_{1,n}$	$p_{2,n}$							

Les probabilités dépendent de n et i



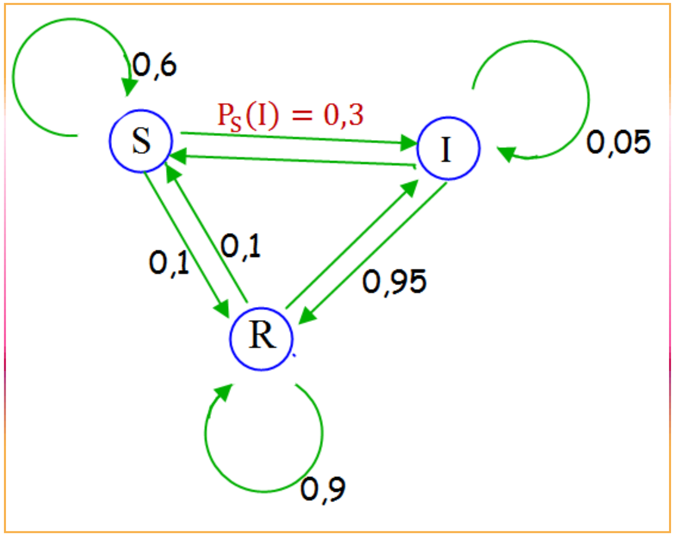
Retour à l'exemple S.I.R
loi de X_n , matrice de transition

Les trois états sont S, I et R

Imaginons que l'on s'intéresse aux évolutions possibles d'un individu suceptible au départ, X_n est la variable aléatoire qui donne son état après n étapes.

X_0 a pour loi :

X_0	**S**	**I**	**R**
$\boldsymbol{P(X_0)}$	1	0	0



Retour à l'exemple S.I.R

loi de X_n , matrice de transition

X_1 a pour loi :

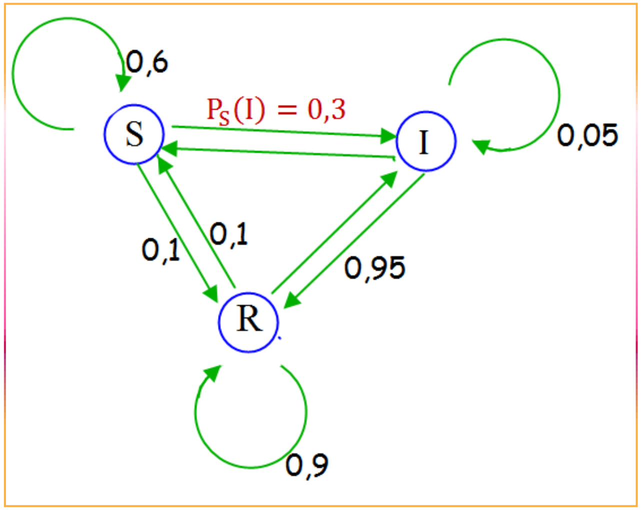
X_1	**S**	**I**	**R**
$\boldsymbol{P(X_1)}$	0,6	0,3	0,1

On détermine la loi de X_2 à l'aide de la **formule des probabilités totales**, par exemple :

$$P(X_2 = S) = P_{(X_1=S)}(X_2 = S) \times P(X_1 = S) + P_{(X_1=I)}(X_2 = S) \times P(X_1 = I) + P_{(X_1=R)}(X_2 = S) \times P(X_1 = R)$$

Retour à l'exemple S.I.R

loi de X_n , matrice de transition



Loi de X_2 à l'aide de la formule des probabilités totales :

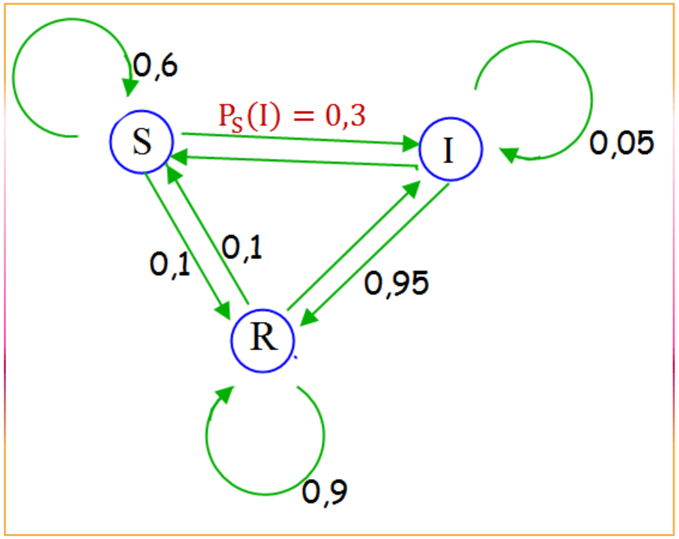
$$P(X_2 = S) = \boxed{P_{(X_1=S)}(X_2 = S)} \times P(X_1 = S) + \boxed{P_{(X_1=I)}(X_2 = S)} \times P(X_1 = I) + \boxed{P_{(X_1=R)}(X_2 = S)} \times P(X_1 = R)$$

$$P(X_2 = I) = \boxed{P_{(X_1=S)}(X_2 = I)} \times P(X_1 = S) + \boxed{P_{(X_1=I)}(X_2 = I)} \times P(X_1 = I) + \boxed{P_{(X_1=R)}(X_2 = I)} \times P(X_1 = R)$$

$$P(X_2 = R) = \boxed{P_{(X_1=S)}(X_2 = R)} \times P(X_1 = S) + \boxed{P_{(X_1=I)}(X_2 = R)} \times P(X_1 = I) + \boxed{P_{(X_1=R)}(X_2 = R)} \times P(X_1 = R)$$

Retour à l'exemple S.I.R

loi de X_n , matrice de transition



Autrement dit, en notant U_n la matrice **ligne**

$$U_n = (P(X_n = S); P(X_n = I); P(X_n = R))$$

et M la matrice carrée : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,95 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$,

Pour tout entier naturel n : $\boxed{U_{n+1} = U_n M}$

Matrice de transition d'un graphe probabiliste

La matrice de transition d'un graphe probabiliste à N sommets est la matrice carrée M de dimension N, dont les coefficients m_{ij} sont les probabilités conditionnelles de passer à l'état j sachant que l'on est à l'état i. La matrice dépend de l'ordre de sommets.

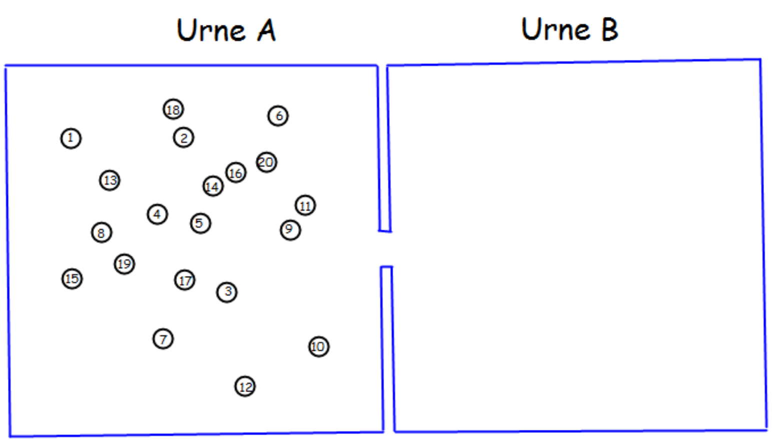
Si la matrice ligne U_n décrit la loi de X_n,
alors pour tout n:

$$\boxed{U_{n+1} = U_n\, M \quad \text{et} \quad U_n = U_0 M^n}$$

La loi de X_0 est aussi appelée : état probabiliste initial .
Si $n \geq 1$, la loi de X_n est aussi appelée : état probabiliste après la nième étape

Les urnes de Ehrenfest

- On dispose de deux urnes A et B ainsi que de N boules numérotées 1,2, … , N
- A intervalles réguliers une boule et une seule, choisie au hasard parmi les N, change d'urne. On effectue ainsi n tirages
- A l'instant initial toutes les boules sont dans l'urne A



Avec les élèves

Simulation

Étude de l’évolution de l’urne A
Y-a-t-il stabilisation conformément à l’intuition ?
Travail sur Excel1

Étude expérimentale de X_n **(**variable aléatoire donnant le nombre de boules dans A), N et n étant fixés.
Excel2 ou Scilab

Modélisation de l’expérience, recherche d’un algorithme

Avec quelle structure de données modéliser les deux urnes , sachant qu’une boule est soit dans l’urne A, soit dans l’urne B ?

N° boule	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Boule présente dans A	Oui	Non	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	oui
Boule présente dans B	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Non	Non	Oui	Non

Urnes de Ehrenfest modélisation, algorithme

N° boule	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Boule présente dans A	1	0	0	1	0	1	1	0	1

Une simple liste permet de connaître la configuration des urnes à l'étape n

Algorithme
Etat de l'urne A après simulation de n tirages aléatoires

Entrées

N le nombre de boules, n le nombre de tirages

Traitement

initialiser une liste l de N éléments égaux à 1

- A vous !

pour k variant de 1 à n

faire

tirer un nombre aléatoire i entre 1 et N

$l[i]$ prend la valeur $1 - l[i]$

fin du pour

Sortie

afficher l

Exemples de programmes

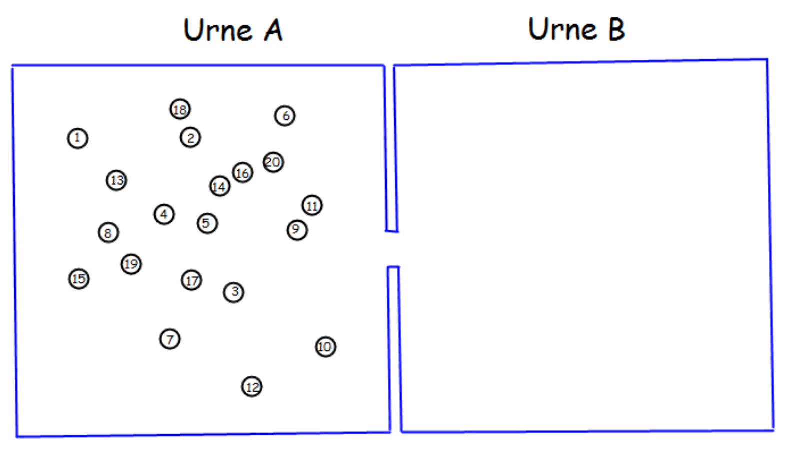
- En Xcas programme 1
- programme 2, visualisation de l'urne A au cours des n transferts aléatoires d'une boule
- un autre algorithme illustré

avec Scilab, urnes modélisées par des ensembles

La problématique

Paradoxe relevé par Boltzmann : un système thermodynamique évolue vers un état stable de manière irréversible, mais les équations physiques, elles, sont réversibles.

- Les époux Ehrenfest (physiciens) ont proposé de considérer deux enceintes A et B de même volume. Un gaz est contenu dans A, le vide est fait dans l’enceinte B, puis on fait un trou dans la paroi séparant les deux enceintes…



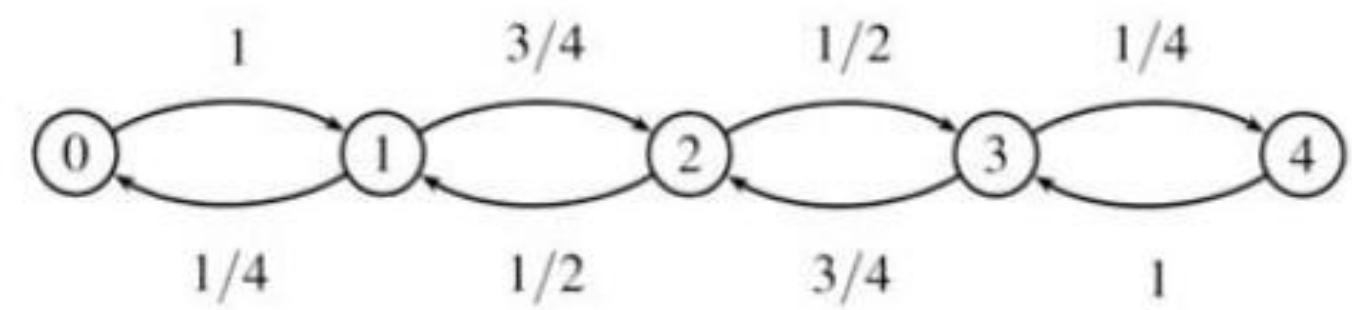
Quelques cas particuliers

- le cas N=2 (avec 2 boules dans l’urne A au départ) est détaillé dans le document ressource
- Etude le cas N=4 à l’aide de logiciels de calcul formel :

Etude de l'exemple N=4

(4 boules)

- dessiner un graphe probabiliste qui modélise le problème
- réponse



graphe probabiliste :

Les sommets donnent le nombre de boules dans l'urne A

Matrice de transition associée à ce graphe probabiliste

- donner la matrice de transition associée à ce graphe
- Réponse

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculs d’états probabilistes avec logiciel de calcul formel

Matrices : produit et puissances

Avec Maxima

Ehrenfest_Matrice

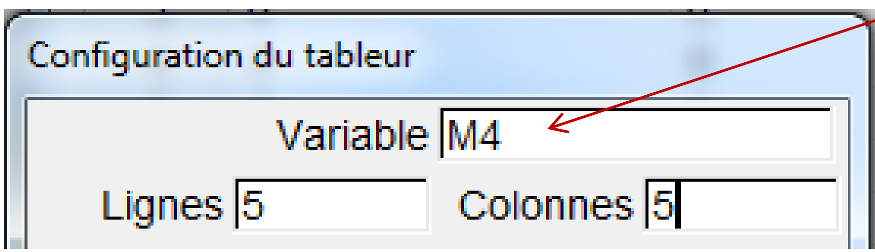
Etude du cas : N=4
matrices, produit, puissances
Avec Xcas

➢Ouvrir une session Xcas

1- Ouvrir « un tableur » avec Alt+t

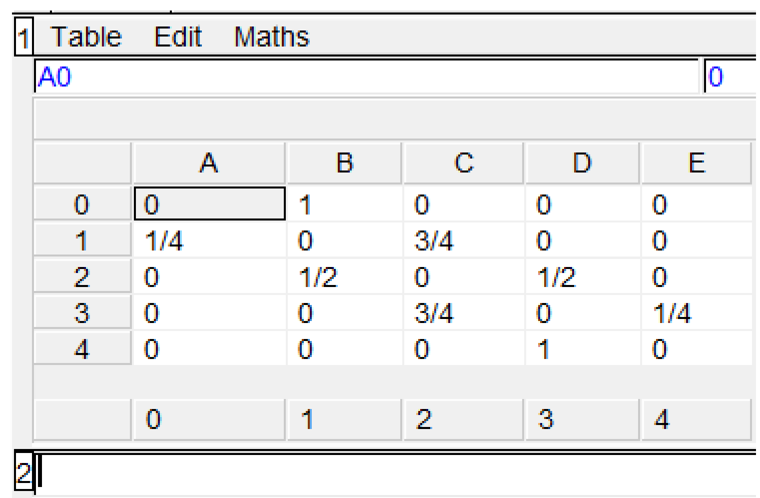
Remplir la fenêtre

Nom de la matrice



2- remplir la matrice par colonne

Avec la touche Entrée



	A	B	C	D	E
0	0	1	0	0	0
1	1/4	0	3/4	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	3/4	0	1/4
4	0	0	0	1	0
	0	1	2	3	4

➢ Rentrer successivement les commandes :

```
M4  // controle de la matrice
E0:=[0,0,0,0,1]
E0*M4
E0*M4^10
supposons(n>0)
Mn:=ratnormal(matpow(M4,n))
En:=E0*Mn
```

Puissance de M

Calcul d'un M^n où n est un paramètre

ratnormal réduit au même dénominateur

Continuons avec l'espérance

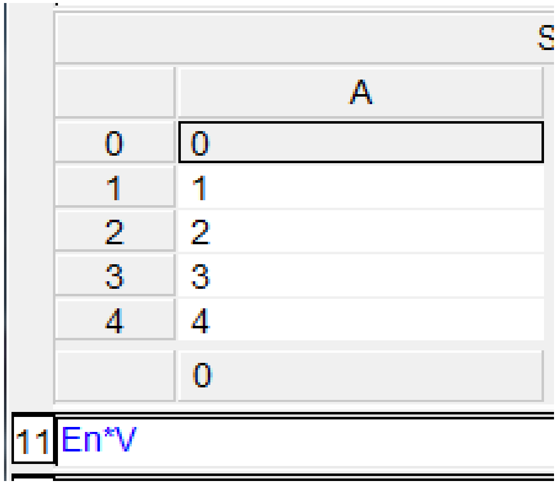
Il reste à multiplier la matrice ligne qui donne la les probabilités de la loi de X_n par la matrice colonne qui contient les valeurs prises par X_n

pour obtenir :

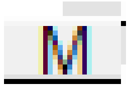
$$\sum_{k=0}^{N} k \ \times P(X_n = k) : \ \text{on créé le vecteur} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N \end{pmatrix}$$

Calcul de l’espérance

Créons le vecteur colonne: avec une nouvelle matrice appelée V (avec Alt +T) :



Puis on calcule $X_n V$ pour obtenir l’espérance

(réduire le résultat : clic sur  en bas à droite du résultat, puis Sélectionner tout, puis Simplify

[Corrigé](#)

Cas général

On peut démontrer que :

$$E(X_n) - \frac{N}{2} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \times \left(E(X_0) - \frac{N}{2}\right)$$

En particulier si toutes les boules sont dans A au départ:

$$E(X_n) - \frac{N}{2} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \times \frac{N}{2}$$

Variance de X_n, cas N=4

On peut continuer avec la variance :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E^2(X_n) = \frac{2^{2n} - 4}{2^{2n}}$$

Voir le détail dans le document de B Body

(attention, selon les versions, les matrices sont transposées)

Recherche d’un état stable

On appelle état stable, tout état probabiliste E tel que $EM = E$

Résolution du système (a,b,c,d,e) M= (a,b,c,d,e) avec a+b+c+d+e=1

$$(a, b, c, d, e) = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$$

C’est-à-dire $\mathscr{B}$(4;1/2)

Corrigé 1 corrigé 2 sans matrice

Un autre état initial

un autre état initial

On peut prendre $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$

C'est-à-dire qu'avant de démarrer le processus on choisit au hasard (uniformément) le nombre initial de boules dans A

Ou bien (a,b,c,d,e) un état initial quelconque (avec a + b + c + d + e = 1)

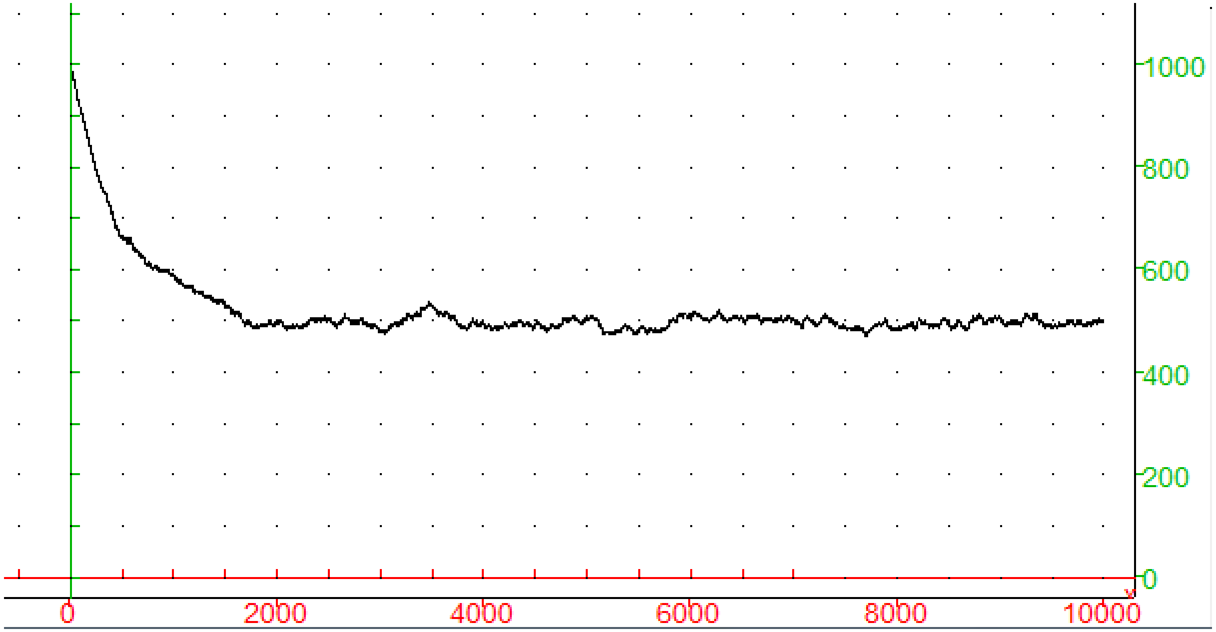
Dans ce cas l'espérance de X_n vaut $$2 + \frac{2e + d - b - 2a}{2^n}.$$

Dans tous les cas on a : $$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 2$$

et $$\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 1$$

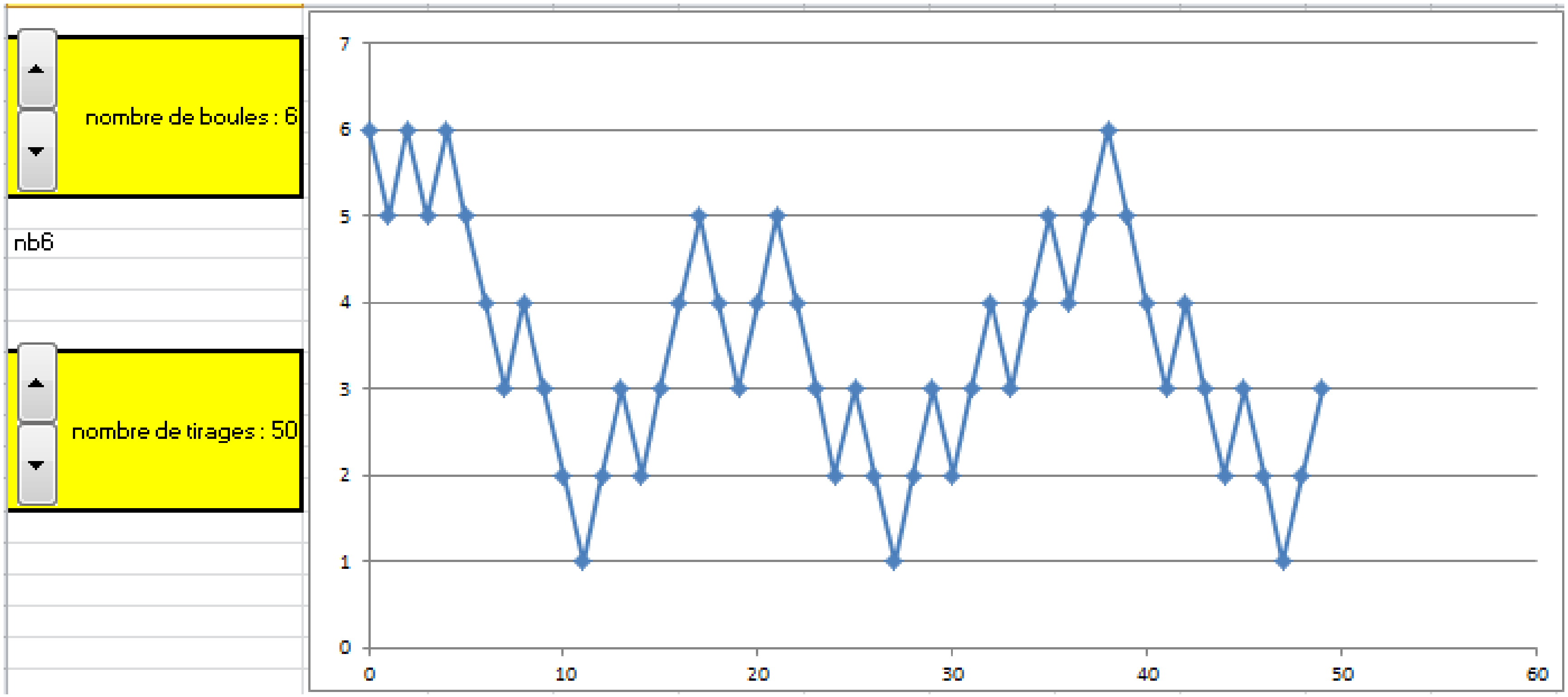
Retours à l'état initial

Simulation avec 1000 boules et 10 000 lancers



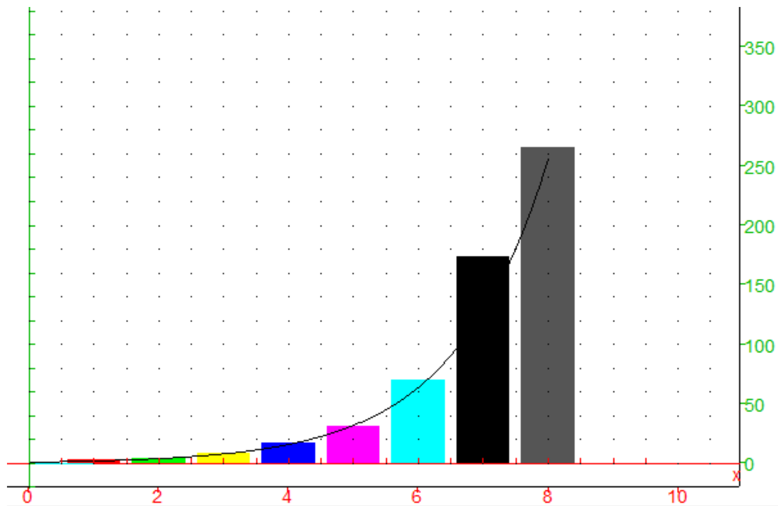
Excel

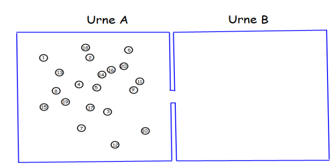
Retours à l'état initial



Retours à l'état initial

Estimer le temps moyen de retour à l'état initial (toutes les boules dans l'urne A) en fonction du nombre de boules
[Ehrenfest4RetoursEtatInitial.xws]   Simulation :





en abscisse : le nombre de boules,
en ordonnée : le nombre moyen de tirages entre deux retours à l'état initial

Quelques résultats

N désignant le nombre de boules

1. l'état stable existe et suit la loi binomiale $B_{N,\frac{1}{2}}$
2. Dans ce cas la probabilité d'obtenir toutes les boules dans A est $\mathrm{P}(X_n = N) = \frac{1}{2^N}$, donc le nombre moyen de tirages entre deux retours à l'état initial est 2^N

3. Ceci se vérifie quelque soit l'état initial

Quelques éléments de démonstration dans [SMG6ModeleDiffusionEhenfest]

Questions

Quel crédit accordons –nous au calcul des probabilités ?

En renouvellant suffisamment l’expérience, obtenir un retour à l’état initial est un événement presque sûr…

L’évaluation

- Quelques idées :
- Il peut y avoir de la recherche documentaire, (exposés)
- Des TP avec de l’algorithmique et / ou du calcul formel, on retrouve l’ évaluation en algorithmique
- Des devoirs classiques dans lesquels on introduit les problèmes rencontrés dans le programme.
- …

bibliographie

- Document ressource pour la spécialité en Terminale S
- Revue Tangente hors-série n°43, septembre 2011

- http://perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/AGREG/TEXTES/urne.pdf

- Pour un calcul de l’espérance : « Calcul des probabilités » Dominique Faota, Franchi et Fuchs chez Dunod, p 274