Logique et Quantificateurs

Une proposition mathématique est un énoncé qui est vrai ou faux, il n'y a pas d'autre alternative. Ce n'est pas le cas de toutes les propositions en langage courant, par exemple : « Bonjour » ou « Dis-le moi ! » ne sont ni vraies ni fausses mais « il pleut » ou « je suis en cours de maths » sont des propositions qui peuvent être vraies ou fausses.

Le langage courant est souvent ambigu : la phrase : « Tous les musées sont fermés certains jours » signifie-t-elle « certains jours, tous les musées sont fermés » ou signifie-t-elle « chaque musée est fermé certains jours », ce qui est tout à fait différent ?

En mathématiques, pour pouvoir affirmer avec certitude qu'une propriété est vraie ou fausse, il ne peut pas y avoir d'ambigüité. C'est pourquoi il est nécessaire d'adopter un langage précis spécifique aux mathématiques.

Les quantificateurs servent à indiquer pour quels objets (certains, tous) une propriété est vraie.

Quantificateur universel : $\forall$

Il signifie « Quel que soit », « pour tout » « pour n'importe quel ».

Quantificateur existentiel : $\exists$

Il signifie : « Il existe au moins un » et se lit « il existe ».

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental. Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs, le sens change. Par exemple dans les phrases « Pour toutes les salles, il existe une clé qui en ouvre la porte » et « Il existe une clé qui, pour toutes les salles, ouvre la porte », parle-t-on de la même clé ?

Exercice 1 : Ecrire en langage courant :

1) Ecrire les propositions suivantes en langage courant :

Par exemple : $\forall x \geq 0 \ \exists y \geq 0 \ \ y^2 = x$ *: Pour tout réel positif* x*, il existe un réel positif* y *tel que* $y^2 = x$

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$

2) $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$

3) $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$

2) Associer chacune des propositions précédentes à l'une des propriétés ci-dessous :

a) La suite (u_n) est positive,

b) La suite (u_n) est négative,

c) La suite (u_n) n'est pas positive,

d) La suite (u_n) est croissante,

e) La suite (u_n) est strictement croissante,

f) La suite (u_n) est décroissante,

g) La suite (u_n) n'est pas décroissante

Exercice 2 : Associer les propositions :

- $\forall x \in \mathrm{R} \quad f(x) > 0$
- $\exists x \in \mathrm{R} \quad f(x) > 0$
- $\forall x \in \mathrm{R} \quad f(x) \neq 0$
- $\exists x \in \mathrm{R} \quad f(x) \neq 0$

- La fonction f n'est pas nulle.
- La fonction f n'est pas négative.
- La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
- La courbe C_f est au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 3 : Le bon quantificateur :

Les propositions suivantes sont-elles vraies si on remplace les pointillés par $\exists$? par $\forall$?

1) …. $x \in \mathrm{R} \; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2) …. $x \in \mathrm{R} \; (x+1)^2 = x^2 + 1$
3) …. $x \in \mathrm{R} \; x^2 + 3x + 2 = 0$
4) …. $x \in \mathrm{R} \; x^2 + x + 4 \neq 0$

Exercice 4 : L'ordre des quantificateurs :

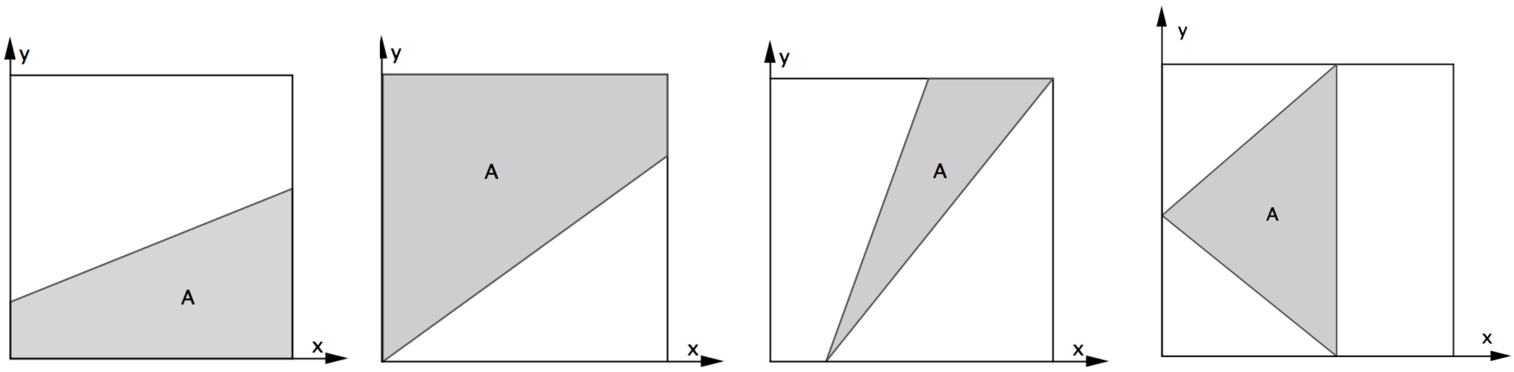
Pour chacune des zones A représentées dans les repères ci-dessous indiquer quelles propositions sont vraies :

1. $\forall x \in [0;1] \; \exists y \in [0;1] \quad (x,y) \in A$

2. $\forall y \in [0;1] \; \exists x \in [0;1] \quad (x,y) \in A$

3. $\exists x \in [0;1] \; \forall y \in [0;1] \quad (x,y) \in A$

4. $\exists y \in [0;1] \; \forall x \in [0;1] \quad (x,y) \in A$



Exercice 5 : Ecrire avec des quantificateurs :

Ecrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs $\forall$ ou $\exists$:

1)
   a) La suite (u_n) est positive.
   b) La suite (u_n) est positive à partir du rang 3.
   c) La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
2)
   a) La suite (u_n) est majorée par 5.
   b) La suite (u_n) est majorée.
   c) La suite (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 6 : Reconnaître une définition du cours :

1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$
2) $\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad u_n > A$
3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |u_n - 3| \le \varepsilon$

Exercice 7 : Vrai/faux affirmation avec un « Pour tout »

Pour montrer qu'une proposition commençant par « pour tout » est **vraie**, il faut justifier qu'elle est toujours vraie (en utilisant une propriété du cours, en faisant une démonstration par récurrence…). Pour montrer qu'elle est **fausse**, il suffit de trouver un contre-exemple.

1) **Affirmation 1 :** « Tous les ans Noël est en décembre »
2) **Affirmation 2 :** « Aujourd'hui tout est fabriqué en Chine »
3) **Affirmation 3 :** « Pour tout nombre complexe z, le nombre $\dfrac{z\bar{z}}{z+\bar{z}}$ est réel »
4) **Affirmation 4 :** « Pour tous les nombres réels a et b , $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ »
5) **Affirmation 5 :** « Pour tout entier $n \ge 2$; $n^2 \ge 2^n$ »
6) **Affirmation 6 :** « Pour tout entier naturel non nul n, $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ »
7) **Affirmation 7 :** « Pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

Exercice 8 : Vrai/faux affirmation avec un « Il existe »

Pour montrer qu'une proposition commençant par « il existe » est **vraie**, il suffit de trouver un exemple. Pour montrer qu'elle est **fausse**, il faut justifier que ce n'est vrai dans aucun cas.

1) **Affirmation 1 :** « Il existe des années où il y a un 29 février »
2) **Affirmation 2 :** « Il existe des parallélogrammes dont les diagonales ne se coupent pas en leurs milieux »
3) **Affirmation 3:** « Il existe des nombres réels a et b tels que $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ »
4) **Affirmation 4 :** « Il existe un nombre complexe z tel que $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ »
5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé,
   Affirmation 5 : « Il existe un point de la courbe C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 1$ »