Exercice : arithmétique

Dans l'exercice, a, b, c et d sont des nombres entiers compris entre 0 et 9 avec a non nul.

On note $\overline{ab}$ l'écriture décimale de l'entier naturel à 2 chiffres tel que :

• a est le chiffre des dizaines,

• b est le chiffre des unités.

On a donc : $\overline{ab} = 10 \times a + b$

De manière analogue : un entier à 3 chiffres s'écrit : $\overline{abc} = 100 \times a + 10 \times b + c$

La partie A peut être traitée de manière indépendante des parties B et C.

Partie A : Critères de divisibilité

L'objet de cette partie est de travailler sur les différents critères de divisibilité.

1) Critère de divisibilité par 11.

En remarquant que les nombres 297, 880 et 242 sont divisibles par 11, un élève a formulé la conjecture suivante :

« Si le chiffre des dizaines d'un nombre à trois chiffres est égal à la somme de son chiffre des centaines et de son chiffre des unités alors ce nombre est divisible par 11 ».

a) Vérifier cette conjecture pour les nombres 297, 880 et 242.

Réponse :
Pour vérifier la conjecture de l'élève, il faut calculer la somme des chiffres des centaines et des unités pour chacun des nombres donnés, et vérifier si cette somme est égale au chiffre des dizaines. Si c'est le cas, alors le nombre est divisible par 11.

Pour le nombre 297, la somme des chiffres des centaines et des unités est 2 + 7 = 9, qui est égale au chiffre des dizaines. $11 \times 27 = 297$ donc 297 est divisible par 11.
Donc la conjecture est vraie pour 297.

Pour le nombre 880, la somme des chiffres des centaines et des unités est 8 + 0 = 8, qui est égale au chiffre des dizaines. $11 \times 80 = 880$ donc 880 est pas divisible par 11.
Donc la conjecture est vraie pour 880.

Pour le nombre 242, la somme des chiffres des centaines et des unités est 2 + 2 = 4, qui est égale au chiffre des dizaines. $11 \times 22 = 242$ donc 242 est divisible par 11.
Donc la conjecture est vraie pour 242.

RAISONNER L’élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L’élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L’élève a calculé la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités pour au moins un nombre mais ne vérifie pas que le nombre est bien divisible par 11.	L’élève a calculé la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités pour un nombre **et** vérifie que le nombre est bien divisible par 11.	L’élève a calculé la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités **et** vérifie que le nombre est bien divisible par 11 pour les trois nombres.

b) En utilisant cette conjecture, déterminer 10 nombres à 3 chiffres divisibles par 11.

Réponse :
En utilisant la conjecture de l'élève, on peut déterminer 10 nombres à 3 chiffres divisibles par 11 en cherchant les nombres pour lesquels le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres des centaines et des unités. Les nombres sont :
$1 + 2 = 3$, ainsi les entiers 132 et 231 sont divisibles par 11.
$1 + 3 = 4$, ainsi les entiers 143 et 341 sont divisibles par 11.
$1 + 4 = 5$, ainsi les entiers 154 et 451 sont divisibles par 11.
$1 + 5 = 6$, ainsi les entiers 165 et 561 sont divisibles par 11.
$2 + 6 = 8$, ainsi les entiers 286 et 682 sont divisibles par 11.

CHERCHER L’élève teste, essaye plusieurs pistes de résolution.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou donne des réponses fausses.	L’élève donne 1 nombre correct.	L’élève donne 5 nombres corrects.	L’élève donne 10 nombres corrects.

c) Le nombre 924 est-il divisible par 11 ? Ce nombre satisfait-il la conjecture énoncée dans la question a) ? Que peut-on conclure ?

Réponse :
$11 \times 84 = 924$ donc 924 est divisible par 11.
$9 + 4 = 13$. Cette somme n'est pas égale au chiffre des dizaines, qui est 2, donc la conjecture de l'élève n'est pas vérifiée pour le nombre 924.
On peut conclure que la conjecture émise par l’élève ne permet pas de trouver tous les entiers à trois chiffres qui sont divisibles par 11.

RAISONNER L’élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L’élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L’élève utilise la conjecture mais se trompe dans l’interprétation (début de raisonnement autour de la conjecture).	L’élève a calculé la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités pour 924 **et** vérifie que 924 est bien divisible par 11 mais ne conclue pas.	L’élève a calculé la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités pour 924 **et** vérifie que 924 est bien divisible par 11. Il n’oublie pas la conclusion.

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

2) **Critère de divisibilité par 9**

Propriété 1 : « Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9 »

L'objectif de la question 2 est de démontrer la propriété 1 dans le cas particulier d'un entier à 4 chiffres.
On considère un nombre à 4 chiffres noté $\overline{abcd}$, avec a non nul.

a) Recopier et compléter l'égalité suivante : $\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times \ldots + c \times \ldots + d$

Réponse : $\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1$.

CALCULER L'élève utilise le calcul littéral.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	L'élève propose une décomposition qui est incomplète ou qui n'est pas correcte.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{abcd}$ mais qui n'est pas celle demandée.	L'élève donne la décomposition demandée pour $\overline{abcd}$.

b) Montrer que : $\overline{abcd} = 9 \times (111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$

Réponse :
$a \times 1000 = 999 \times a + 1 \times a = 999 \times a + a$
$b \times 100 = 99 \times b + 1 \times b = 99 \times b + b$
$c \times 10 = 9 \times c + 1 \times c = 9 \times c + c$
En utilisant les trois égalités précédentes, il vient que :

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1\\ &= 999 \times a + a + 99 \times b + b + 9 \times c + c + d\\ &= 999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d\end{aligned}$$

Puis en factorisant par 9 dans les trois premières expressions on a :
$999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d = 9 \times (111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$

CHERCHER / RAISONNER L'élève teste, essaye plusieurs pistes de résolution.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie de l'élève mais ne permettent pas de trouver la décomposition.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abcd}$ mais l'élève n'aboutit pas.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abcd}$ et l'élève aboutit à la bonne décomposition.

CALCULER L'élève utilise le calcul littéral.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	L'élève propose une décomposition qui est incomplète ou qui n'est pas correcte ou s'appuie sur un exemple.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{abcd}$ en faisant apparaître 999 ; 99 et 9 mais ne factorise pas par 9.	L'élève donne la décomposition demandée pour $\overline{abcd}$.

c) On rappelle la propriété suivante sur la divisibilité : Si un nombre divise deux autres nombres alors il divise leur somme.

Exemple : 9 divise 360 et 27 donc 9 divise 387 (387 = 360 + 87)

Montrer que si $a + b + c + d$ est divisible par 9 alors $\overline{abcd}$ est divisible par 9.

Réponse :
$9 \times (111 \times a + 11 \times b + c)$ est divisible par 9 et si $a + b + c + d$ est divisible par 9,
alors la somme de $9 \times (111 \times a + 11 \times b + c)$ et $a + b + c + d$ est divisible par 9.
Donc $9 \times (111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$ est divisible par 9 .

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas ou s'appuie sur des exmples.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

3) Critère de divisibilité par 3.

Propriété 2 : « Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3 »

Par un raisonnement analogue à celui de la question 2, démontrer la propriété 2 dans le cas particulier d'un entier à 4 chiffres.

Réponse :

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1\\ &= 999 \times a + a + 99 \times b + b + 9 \times c + c + d\\ &= 999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d\\ &= 999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d\end{aligned}$$

Puis en factorisant par 3 dans les trois premières expressions on a :

$$999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d = 3 \times (333 \times a + 33 \times b + 3c) + a + b + c + d$$

$3 \times (333 \times a + 33 \times b + 3c)$ est divisible par 3 et si $a + b + c + d$ est divisible par 3, alors la somme de $3 \times (333 \times a + 33 \times b + 3c)$ et $a + b + c + d$ est divisible par 3.
Donc $3 \times (333 \times a + 33 \times b + 3c) + a + b + c + d$ est divisible par 3.

CHERCHER / RAISONNER L'élève teste, essaye plusieurs pistes de résolution.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie de l'élève mais ne permettent pas de trouver la décomposition.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abcd}$ mais l'élève n'aboutit pas.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abcd}$ et l'élève aboutit à la bonne décomposition.

CALCULER L'élève utilise le calcul littéral.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	L'élève propose une décomposition qui est incomplète ou qui n'est pas correcte.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{abcd}$ en faisant apparaître 333 ; 33 et 3 mais ne factorise pas par 3.	L'élève donne la décomposition de $\overline{abcd}$ en factorisant par 3.

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas ou s'appuie sur des exemples.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

Partie B : un nombre à deux chiffres

Soit un entier à deux chiffres $\overline{ab}$ (a et b non nuls). On suppose $a \geq b$.
L'entier à deux chiffres $\overline{ba}$ est obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1. Montrer que 86 – 68 est un multiple de 9 et que 86 + 68 est un multiple de 11.

Réponse :
$86 - 68 = 18$.
$1 + 8 = 9$ donc $86 - 68$ est un multiple de 9.

$86 + 68 = 154$.
$1 + 4 = 5$ donc $86 + 68$ est un multiple de 11.

RAISONNER L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève utilise la divisibilité par 9 ou par 11 mais n'aboutit pas.	L'élève vérifie correctement la divisibilité pour 9 **ou** pour 11.	L'élève vérifie correctement la divisibilité pour 9 **et** pour 11.

2. On rappelle que : $\overline{ab} = 10 \times a + b$

Montrer que la différence $\overline{ab} - \overline{ba}$ est un multiple de 9 et que la somme $\overline{ab} + \overline{ba}$ est multiple de 11.

Réponse :

$$\begin{aligned}\overline{ab} - \overline{ba} &= 10 \times a + b - (10 \times b + a) = 10 \times a + b - 10 \times b - a \\ &= 10 \times a - 10 \times b + b - a = 10 \times (a - b) - (a - b) \\ &= (a - b) \times (10 - 1) = (a - b) \times 9\end{aligned}$$

$\overline{ab} - \overline{ba}$ est bien un multiple de 9.

$$\begin{aligned}\overline{ab} + \overline{ba} &= 10 \times a + b + (10 \times b + a) = 10 \times a + b + 10 \times b + a \\ &= 10 \times a + 10 \times b + b + a = 10 \times (a + b) + (a + b) \\ &= (a + b) \times (10 + 1) = (a + b) \times 11\end{aligned}$$

$\overline{ab} + \overline{ba}$ est bien un multiple de 11.

CHERCHER L'élève teste, essaye plusieurs pistes de résolution.			
Maîtrise insuffisante **0 point**	**Maîtrise fragile** **1 point**	**Maîtrise satisfaisante** **2 points**	**Très bonne maîtrise** **3 points**
L'élève ne produit rien.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie de l'élève mais ne permettent pas de prouver ce qui est demandé.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{ab}$ mais l'élève n'aboutit pas.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{ab} - \overline{ba}$ ou $\overline{ab} + \overline{ba}$ et l'élève aboutit à la bonne décomposition.

CALCULER L'élève utilise le calcul littéral.			
Maîtrise insuffisante **0 point**	**Maîtrise fragile** **1 point**	**Maîtrise satisfaisante** **2 points**	**Très bonne maîtrise** **3 points**
L'élève ne produit rien.	L'élève propose une décomposition qui est incomplète ou qui n'est pas correcte ou s'appuie sur des exemples.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{ab} - \overline{ba}$ ou $\overline{ab} + \overline{ba}$ mais ne factorise pas par 9 ou par 11.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{ab} - \overline{ba}$ **<u>ou</u>** $\overline{ab} + \overline{ba}$ et factorise par 9 **<u>ou</u>** par 11. *+3 points si les deux*

Partie C : un nombre à trois chiffres

Soit un entier à trois chiffres $\overline{abc}$ (a et c non nuls). On suppose $a \geq c$.

L'entier à trois chiffres $\overline{cba}$ est obtenu en permutant le chiffre des centaines et celui des unités.

1. On s'intéresse aux entiers suivants : 501 ; 412 et 785.

Pour chacun de ces nombres, montrer que la différence obtenue entre ce nombre et sa permutation est un multiple de 99.

Réponse :

$501 - 105 = 396 = 99 \times 4$
$412 - 214 = 198 = 99 \times 2$
$785 - 587 = 198 = 99 \times 2$

Donc pour 501 ;412 et 785, la différence obtenue entre ce nombre et sa permutation est un multiple de 99.

RAISONNER L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève a calculé les bonnes différences mais ne vérifie pas que les nombres sont des multiples de 99.	L'élève calcule la bonne différence et vérifie que c'est un multiple de 99 pour un nombre.	L'élève calcule la bonne différence et vérifie que c'est un multiple de 99 pour les trois nombres.

2. Démontrer que $\overline{abc} - \overline{cba}$ est un multiple de 99.

Réponse :
Nous allons généraliser le résultat précédent, en décomposant $\overline{abc}$ et $\overline{cba}$.
$\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c \times 1$ $\quad$ $\overline{cba} = c \times 100 + b \times 10 + a \times 1$

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= a \times 100 + b \times 10 + c \times 1 - (c \times 100 + b \times 10 + a \times 1)\\ &= a \times 100 + b \times 10 + c \times 1 - c \times 100 - b \times 10 - a \times 1\\ &= a \times 100 - c \times 100 + c \times 1 - a \times 1\\ &= (a - c) \times 100 + (c - a)\\ &= (a - c) \times (100 - 1)\\ &= (a - c) \times 99\end{aligned}$$

CHERCHER L'élève teste, essaye plusieurs pistes de résolution.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie de l'élève mais ne permettent pas de prouver ce qui est demandé.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abc}$ mais l'élève n'aboutit pas.	Des traces de recherches apparaissent sur la copie en lien avec l'écriture de $\overline{abc} - \overline{cba}$ et l'élève aboutit à la bonne décomposition.

CALCULER L'élève utilise le calcul littéral.			
Maîtrise insuffisante 0 point	**Maîtrise fragile 1 point**	**Maîtrise satisfaisante 2 points**	**Très bonne maîtrise 3 points**
L'élève ne produit rien.	L'élève propose une décomposition qui est incomplète ou qui n'est pas correcte ou s'appuie sur des exemples.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{abc} - \overline{cba}$ mais ne factorise pas par 99.	L'élève propose une écriture juste de $\overline{abc} - \overline{cba}$ et factorise par 99.

3. La somme $\overline{abc} + \overline{cba}$ est-elle un multiple de 101 ? Justifier.

Réponse :
Prenons par exemple le nombre 851. Sa permutation est 158.
$851 + 158 = 1\,009$
Le reste de la division euclidienne de 1 009 par 101 est 100 donc 1 009 n'est pas un multiple de 101.
Donc $\overline{abc} + \overline{cba}$ n'est pas un multiple de 101.
OU
$\overline{abc} + \overline{cba} = a \times 100 + b \times 10 + c \times 1 + c \times 100 + b \times 10 + a \times 1 = (a + c) \times 101 + b \times 20$

RAISONNER L’élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante **0 point**	**Maîtrise fragile** **1 point**	**Maîtrise satisfaisante** **2 points**	**Très bonne maîtrise** **3 points**
L’élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L’élève utilise la décomposition de $\overline{abc} + \overline{cba}$ mais se trompe dans les écritures ou utilise un exemple qui ne permet pas de conclure.	L’élève utilise la décomposition de $\overline{abc} + \overline{cba}$ ou cherche un contre-exemple mais n’aboutit pas.	L’élève utilise la décomposition de $\overline{abc} + \overline{cba}$ ou cherche un contre-exemple et la réponse est correcte.

COMMUNIQUER L’élève explique à l’oral ou à l’écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante **0 point**	**Maîtrise fragile** **1 point**	**Maîtrise satisfaisante** **2 points**	**Très bonne maîtrise** **3 points**
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L’élève écrit un début de raisonnement qui n’aboutit pas.	Dans l’écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l’écrit de l’élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.