

Exercice 2 : CERCLE ET TRIANGLES

Les résultats démontrés dans la partie A peuvent être admis pour traiter les parties suivantes.

Partie A : Les médiatrices et le cercle circonscrit

L'objectif de cette partie est de démontrer les deux propriétés suivantes :

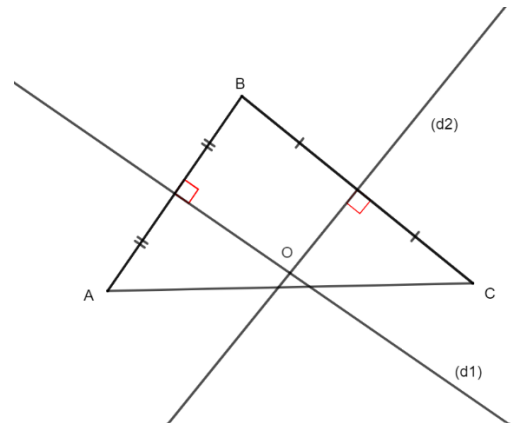
Propriété n°1 : Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes, c'est à dire qu'elles se coupent en un seul point.

Propriété n°2 : Le point d'intersection des médiatrices des trois côtés d'un triangle est le centre d'un cercle passant par ses trois sommets.

On considère un triangle ABC représenté ci-contre.

La droite (d₁) est la médiatrice du segment [AB] et la droite (d₂) est la médiatrice du segment [BC].

On appelle O le point d'intersection des droites (d₁) et (d₂).



1) a) Justifier les égalités suivantes : $OA = OB$ et $OB = OC$.

Réponse :

On sait que la droite (d₁) est la médiatrice du segment [AB].

Or tout point appartenant à la médiatrice d'un segment est équidistant des deux extrémités de ce segment. Comme O appartient à (d₁) alors $OA = OB$.

De même O appartient à la droite (d₂), médiatrice du segment [BC] alors $OB = OC$

RAISONNER

L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève montre qu'il doit utiliser les médiatrices des côtés mais ne parvient pas à prouver l'égalité.	L'élève reconnaît qu'il doit utiliser les médiatrices des côtés et prouve une des deux égalités.	L'élève reconnaît qu'il doit utiliser les médiatrices des côtés et prouve les deux égalités.

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

b) Montrer que le point O appartient à la médiatrice du segment [AC].

<p>Réponse : On a $OA = OB$ et $OB = OC$ donc $OA = OC$. Si un point est équidistant des deux extrémités d'un segment alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment. J'en conclus que le point O appartient à la médiatrice du segment [AC].</p>

RAISONNER L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève montre qu'il doit utiliser les égalités de la question 1) a) mais ne parvient pas à prouver l'égalité.	L'élève aboutit à l'égalité $OA = OC$ mais ne fait pas le lien avec la médiatrice du segment.	L'élève aboutit à l'égalité $OA = OC$ et fait le lien avec la médiatrice du segment.

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

2) En utilisant la question 1), démontrer les propriétés 1 et 2.

Réponse :

Propriété 1 :

D'après la question 1), le point O appartient à la médiatrice du segment [AB], le point O appartient à la médiatrice du segment [BC] et le point O appartient à la médiatrice du segment [AC].

Donc le point O appartient aux trois médiatrices des côtés du triangle, ces médiatrices sont donc concourantes.

Propriété 2 :

On $OA = OB = OC$ donc les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

Ce cercle passe par les trois sommets du triangle ABC dont le centre est le point d'intersection des médiatrices de ce triangle.

RAISONNER

L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève utilise les résultats de la question 1) mais ne parvient pas à démontrer les propriétés.	L'élève utilise les résultats de la question 1) et démontre une des deux propriétés.	L'élève utilise les résultats de la question 1) et démontre les deux propriétés.

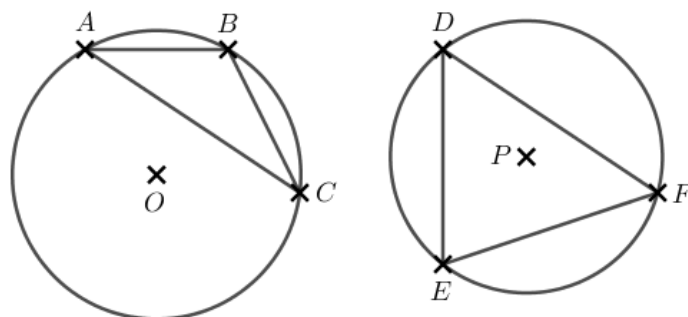
COMMUNIQUER

L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

Dans cette partie A, on a donc démontré, pour tout triangle, l'existence d'un cercle passant par ses trois sommets. On admet l'unicité de celui-ci. Il est appelé cercle circonscrit au triangle.

Exemples : sur les figures ci-contre, le cercle de centre O et de rayon OA est le cercle circonscrit au triangle ABC ; le cercle de centre P et de rayon PE est circonscrit au triangle EDF.

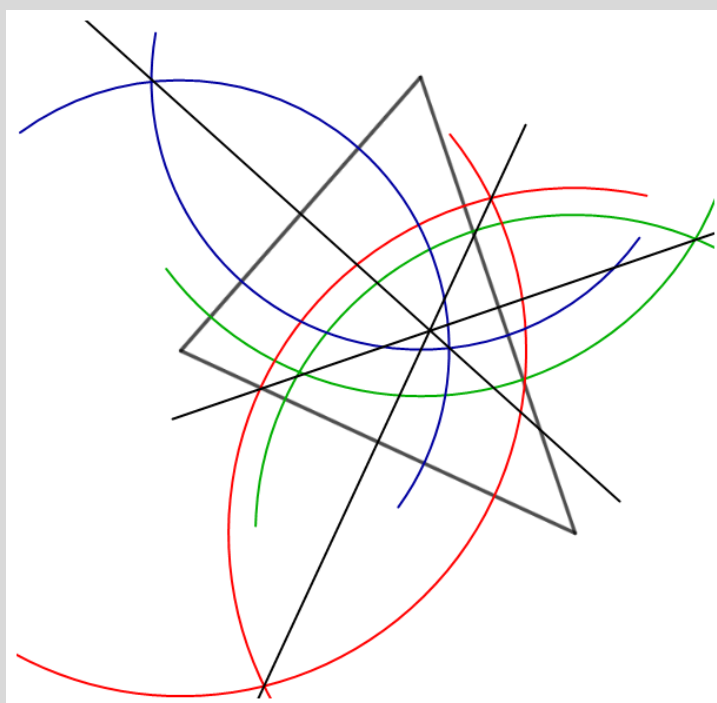
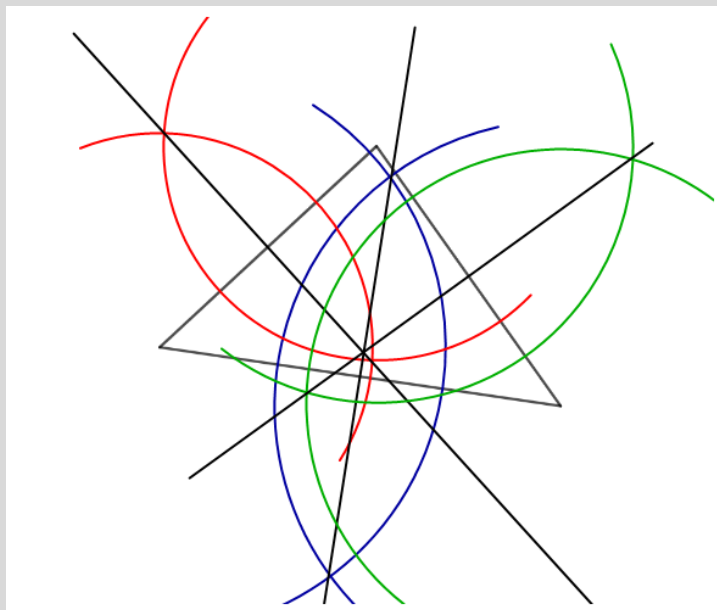


Partie B : Constructions et conjecture

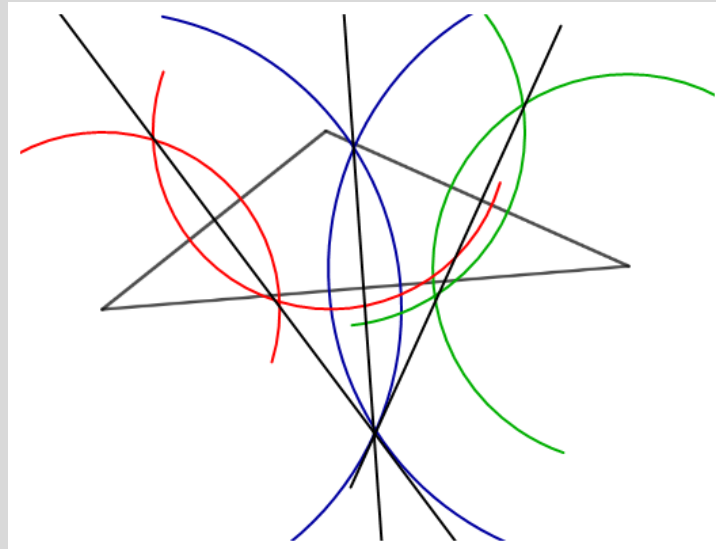
Dans cette question, on cherche à conjecturer l'emplacement du centre du cercle circonscrit à un triangle.

- 1) Pour les six triangles proposés, construire **sur l'annexe 1** les médiatrices des côtés des triangles. *On laissera apparents les tracés de construction.*

Réponse :



Réponse :



REPRESENTER

L'élève utilise et produit une situation spatiale (schémas, croquis, figures géométriques).

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 4 points	Très bonne maîtrise 6 points
L'élève ne produit rien ou une construction est réalisée sans tenir compte des figures en annexe.	L'élève entame une représentation mais n'aboutit pas.	La construction d'au moins deux médiatrices est correcte lorsque les 3 angles sont aigus.	La construction est correctement réalisée avec soin pour les six triangles.

2) Emettre une conjecture sur la position du centre du cercle circonscrit d'un triangle (on pourra distinguer plusieurs cas).

Réponse :

A partir des constructions, on peut conjecturer que :

Si les trois angles d'un triangle sont aigus alors le centre du cercle circonscrit est intérieur au triangle.

Si un triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse

Si un triangle a un angle obtus, alors le centre du cercle circonscrit est extérieur au triangle.

CHERCHER/RAISONNER

L'élève prélève et organise les informations nécessaires, il s'engage dans une démarche

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne une réponse complètement erronée.	L'élève émet une conjecture en lien avec le centre du cercle circonscrit mais n'est pas correcte.	L'élève émet une conjecture correcte pour l'un des trois cas.	L'élève émet une conjecture correcte pour les trois cas.

Partie C : Cercle circonscrit et triangle rectangle

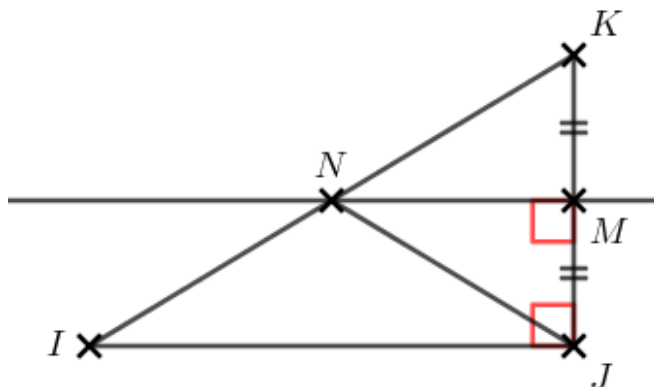
L'objectif de cette question est de démontrer la propriété suivante :

Propriété n°3 : Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse.

On considère un triangle IJK rectangle en J représenté ci-dessous.

Le point M est le milieu du segment $[JK]$.

La médiatrice du segment $[JK]$ coupe le segment $[IK]$ en N .



1) Montrer que $NK = NJ$ et que $\widehat{KNM} = \widehat{JNM}$.

Réponse :

On sait que le point N appartient à la médiatrice du segment $[JK]$.

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.

J'en conclus que $NK = NJ$.

$NK = NJ$ donc le triangle NJK est un triangle isocèle en N .

Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base sont égaux.

J'en conclus que $\widehat{NKM} = \widehat{NJM}$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° , $\widehat{NKM} = \widehat{NJM}$ et $\widehat{NMK} = \widehat{NMJ}$ donc $\widehat{KNM} = \widehat{JNM}$.

RAISONNER

L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève utilise la médiatrice du segment ou le fait que NJK est un triangle isocèle mais ne parvient pas à démontrer les égalités.	L'élève utilise la médiatrice du segment ou le fait que NJK est un triangle isocèle et parvient pas à démontrer une des deux égalités.	L'élève utilise la médiatrice du segment ou le fait que NJK est un triangle isocèle et parvient à démontrer les deux égalités.

COMMUNIQUER

L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

2) Démontrer que la droite (NM) est parallèle à la droite (IJ).

Réponse :

Je sais que les droites (NM) et (IJ) sont perpendiculaires à (JK).

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors ces deux droites sont parallèles.

J'en conclus que les droites (NM) et (IJ) sont parallèles.

RAISONNER

L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	L'élève écrit la propriété pour démontrer que les droites sont parallèles mais ne fait pas le lien avec les points de la figure.	L'élève écrit la propriété pour démontrer que les droites sont parallèles et fait le lien avec les points de la figure.

3) En déduire que $\widehat{NIJ} = \widehat{KNM}$ puis que $\widehat{NJI} = \widehat{JNM}$.

Réponse :

Les angles \widehat{NIJ} et \widehat{KNM} sont des angles correspondants formés par les deux droites parallèles (NM) et (IJ) coupées par la sécante (KI)

Si deux droites sont parallèles, les angles correspondants sont égaux.

J'en conclus que $\widehat{NIJ} = \widehat{KNM}$.

Dans la même configuration de droites, les angles \widehat{NJI} et \widehat{JNM} sont deux angles-alternes.

Si deux droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux.

J'en conclus que $\widehat{NJI} = \widehat{JNM}$.

RAISONNER

L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève utilise les angles correspondants ou alternes-internes mais ne parvient pas à démontrer les égalités.	L'élève utilise les angles correspondants ou alternes-internes et parvient à démontrer une des deux égalités.	L'élève utilise les angles correspondants ou alternes-internes et parvient à démontrer les deux égalités.

COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

- 4) En déduire que $NI = NK = NJ$ et que le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle IJK est le milieu de son hypoténuse.

Réponse :

D'après la question 1), $\widehat{KNM} = \widehat{JNM}$.

D'après la question 2), $\widehat{NIJ} = \widehat{KNM}$ et $\widehat{NJI} = \widehat{JNM}$ donc $\widehat{NIJ} = \widehat{NJI}$.

Si un triangle a deux angles égaux alors c'est un triangle isocèle.

J'en conclus que le triangle NIJ est isocèle en N donc $NI = NJ$.

D'après la question 1), $NK = NJ$ donc $NI = NK = NJ$.

On a $NI = NK = NJ$ donc les points I , K et J appartiennent à un même cercle de centre N .

Ce cercle passe par les sommets du triangle NKJ donc ce cercle est le cercle circonscrit à ce triangle.

Comme N appartient au segment $[IK]$ et $NI = NK$, N est le milieu du segment $[IK]$.

J'en conclus que le milieu de l'hypoténuse du triangle IJK est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

RAISONNER L'élève sait utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou produit des éléments de réponse complètement erronés.	L'élève utilise les résultats des questions 1) et 2) mais ne parvient pas à démontrer que $NI = NK = NJ$.	L'élève utilise les résultats des questions 1) et 2) et parvient à démontrer que $NI = NK = NJ$.	L'élève utilise les résultats des questions 1) et 2) pour prouver que $NI = NK = NJ$ et montre que le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

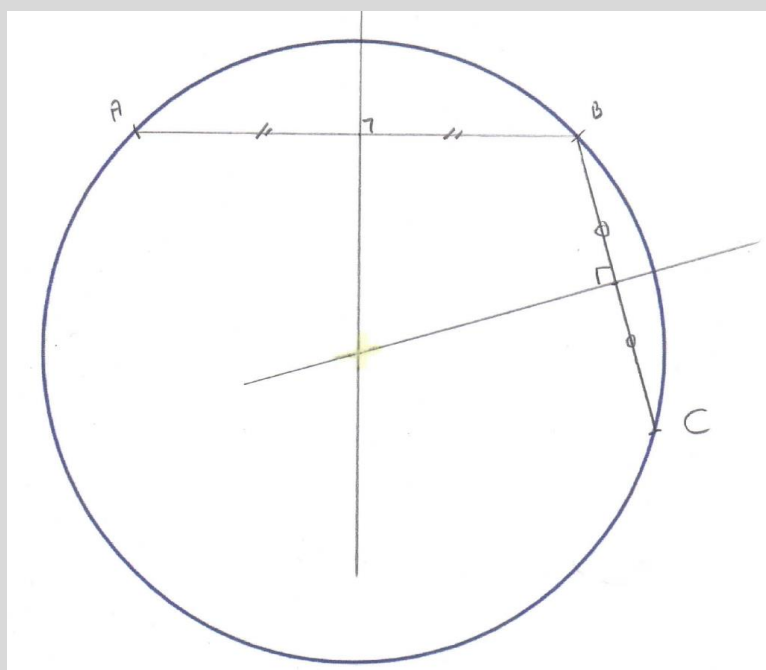
COMMUNIQUER L'élève explique à l'oral ou à l'écrit sa démarche, son raisonnement, un algorithme.			
Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
L'élève ne produit rien ou donne la réponse sans explication.	L'élève écrit un début de raisonnement qui n'aboutit pas.	Dans l'écrit, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement mais elles ne sont pas clairement identifiées ou ordonnées.	Dans l'écrit de l'élève, on peut repérer les différentes étapes du raisonnement clairement identifiées et ordonnées.

Partie D : Cercle et centre

Un cercle (C) a été représenté sur l'**annexe 2**. Par la méthode de votre choix, construire le centre du cercle (C).

On laissera apparents les tracés de construction **sur l'annexe 2** mais la méthode employée et les explications concernant cette construction devront être détaillées dans la copie.

Réponse :



REPRESENTER

L'élève utilise et produit une situation spatiale (schémas, croquis, figures géométriques).

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 4 points	Très bonne maîtrise 6 points
L'élève ne produit rien ou place un point qui n'est pas le centre.	L'élève place le centre du cercle par tâtonnement.	L'élève place deux points ou plus sur la figure, construit une médiatrice d'un segment et place son centre par tâtonnement sur la médiatrice.	L'élève place 3 points sur le cercle, construit 2 ou 3 médiatrices de segments et identifie le centre du cercle à l'intersection des médiatrices.

CHERCHER

L'élève prélève et organise les informations nécessaires, il s'engage dans une démarche

Maîtrise insuffisante 0 point	Maîtrise fragile 1 point	Maîtrise satisfaisante 2 points	Très bonne maîtrise 3 points
Aucune prise d'initiative pour la construction.	Prise d'initiative pour la construction mais non pertinente.	Prise d'initiative pertinente pour la construction mais non aboutie.	Prise d'initiative pertinente et aboutie pour la construction.

