Région académique
ÎLE-DE-FRANCE

académie Créteil

Olympiades 4ème
Mathématiques
Académie de Créteil

Durée de l'épreuve : 2 heures
Le sujet est à rendre à l'issue de l'épreuve
La calculatrice est autorisée
Les annexes, fournies avec le sujet, sont à rendre avec la copie

---

Exercice 1 : QUESTIONS DE DIVISIBILITE

Dans l'exercice, a, b, c et d sont des nombres entiers compris entre 0 et 9 avec a non nul.

On note $\overline{ab}$ l'écriture décimale de l'entier naturel à 2 chiffres tel que :

• a est le chiffre des dizaines,

• b est le chiffre des unités.

On a donc : $\overline{ab} = 10 \times \mathrm{a} + \mathrm{b}$

De manière analogue, un entier à 3 chiffres s'écrit $\overline{abc}$ et on a donc : $\overline{abc} = 100 \times a + 10 \times b + c$

La partie A peut être traitée de manière indépendante des parties B et C.

Partie A : Critères de divisibilité

L'objet de cette partie est de travailler sur différents critères de divisibilité.

1) Critère de divisibilité par 11.

En remarquant que les nombres 297, 880 et 242 sont divisibles par 11, un élève a formulé la conjecture suivante :

« Si le chiffre des dizaines d'un nombre à trois chiffres est égal à la somme de son chiffre des centaines et de son chiffre des unités alors ce nombre est divisible par 11 ».

a) Vérifier cette conjecture pour les nombres 297, 880 et 242.
b) En utilisant cette conjecture déterminer 10 nombres à 3 chiffres divisibles par 11.
c) Le nombre 924 est-il divisible par 11 ? Ce nombre satisfait-il la conjecture énoncée dans la question a) ? Que peut-on conclure ?

2) Critère de divisibilité par 9

Propriété 1 : **Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9.**

L'objectif de la question 2 est de démontrer la propriété 1 dans le cas particulier d'un entier à quatre chiffres.
On considère un nombre à 4 chiffres noté $\overline{abcd}$, avec a non nul.

a) Recopier et compléter l'égalité suivante : $\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times \ldots + c \times \ldots + d$
b) Montrer que : $\overline{abcd} = 9 \times (111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$
c) On rappelle la propriété suivante sur la divisibilité : Si un nombre divise deux autres nombres alors il divise leur somme.

Exemple : 9 divise 360 et 27 donc 9 divise 387 (387 = 360 + 87)

Montrer que si $a + b + c + d$ est divisible par 9 alors $\overline{abcd}$ est divisible par 9.

3) Critère de divisibilité par 3.

Propriété 2 : **Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3.**

Par un raisonnement analogue à celui de la question 2, démontrer la propriété 2 dans le cas particulier d'un entier à quatre chiffres.

Partie B : un nombre à deux chiffres

Soit un entier à deux chiffres $\overline{ab}$ (a et b non nuls). On suppose $a \geq b$.
L'entier à deux chiffres $\overline{ba}$ est obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1) Montrer que 86 – 68 est un multiple de 9 et que 86 + 68 est un multiple de 11.
2) On rappelle que : $\overline{ab} = 10 \times a + b$

   Montrer que la différence $\overline{ab} - \overline{ba}$ est un multiple de 9 et que la somme $\overline{ab} + \overline{ba}$ est multiple de 11.

Partie C : un nombre à trois chiffres

Soit un entier à trois chiffres $\overline{abc}$ (a et c non nuls). On suppose $a \geq c$.

L'entier à trois chiffres $\overline{cba}$ est obtenu en permutant le chiffre des centaines et celui des unités.

1) On s'intéresse aux entiers suivants : 501 ; 412 et 785.

   Pour chacun de ces nombres, montrer que la différence obtenue entre ce nombre et sa permutation est un multiple de 99.

2) Démontrer que $\overline{abc} - \overline{cba}$ est un multiple de 99.

3) La somme $\overline{abc} + \overline{cba}$ est-elle un multiple de 101 ? Justifier.

Exercice 2 : CERCLE ET TRIANGLES

Les résultats démontrés dans la partie A peuvent être admis pour traiter les parties suivantes.

Partie A : Les médiatrices et le cercle circonscrit

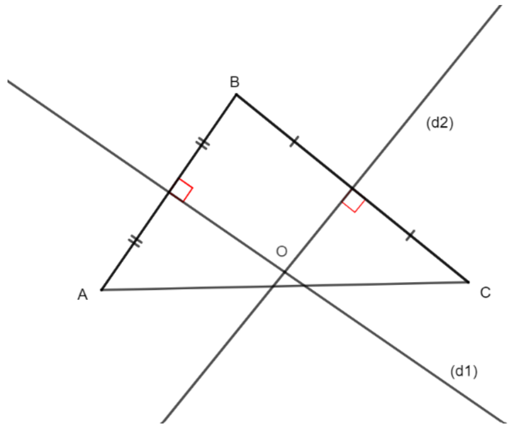
L'objectif de cette partie est de démontrer les deux propriétés suivantes :

Propriété n°1 : Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes, c'est à dire qu'elles se coupent en un seul point.

Propriété n°2 : Le point d'intersection des médiatrices des trois côtés d'un triangle est le centre d'un cercle passant par ses trois sommets.

On considère un triangle ABC représenté ci-contre.

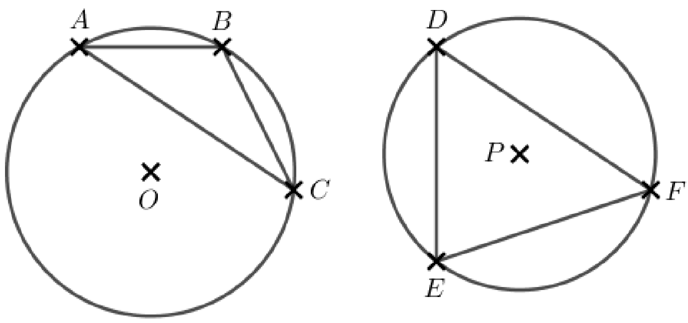
La droite (d_1) est la médiatrice du segment [AB] et la droite (d_2) est la médiatrice du segment [BC].
On appelle O le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).



1) **a)** Justifier que les égalités suivantes : OA=OB et OB=OC.
   b) Montrer que le point O appartient à la médiatrice du segment [AC].
2) En utilisant la question **1)**, démontrer les propriétés 1 et 2.

Dans cette partie A, on a donc démontré, pour tout triangle, l'existence d'un cercle passant par ses trois sommets. On admet l'unicité de celui-ci. **Il est appelé cercle circonscrit au triangle.**

Exemples : sur les figures ci-contre, le cercle de centre O et de rayon OA est le cercle circonscrit au triangle ABC ; le cercle de centre P et de rayon PE est circonscrit au triangle EDF.



Partie B : Constructions et conjecture

Dans cette question, on cherche à conjecturer l'emplacement du centre du cercle circonscrit à un triangle.

1) Pour les six triangles proposés, construire **sur l'annexe 1** les médiatrices des côtés des triangles. *On laissera apparents les tracés de construction.*

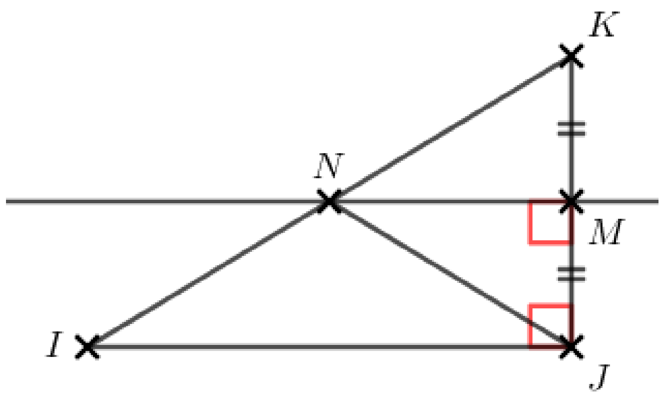
2) Emettre une conjecture sur la position du centre du cercle circonscrit d'un triangle (on pourra distinguer plusieurs cas).

Partie C : Cercle circonscrit et triangle rectangle

L'objectif de cette question est de démontrer la propriété suivante :

<u>Propriété n°3</u> : Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse.

On considère un triangle IJK rectangle en J représenté ci-dessous.
Le point M est le milieu du segment $[JK]$.
La médiatrice du segment $[JK]$ coupe le segment $[IK]$ en N.



1) Montrer que $NK = NJ$ et que $\widehat{KNM} = \widehat{JNM}$.
2) Démontrer que la droite (NM) est parallèle à la droite (IJ).
3) En déduire que $\widehat{NIJ} = \widehat{\mathrm{KNM}}$ puis que $\widehat{NJI} = \mathrm{J}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M}$.
4) En déduire que $NI = NK = NJ$ et que le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle IJK est le milieu de son hypoténuse.

Partie D : Cercle et centre

Un cercle (C) a été représenté sur **l'annexe 2**. Par la méthode de votre choix, construire le centre du cercle (C).

*On laissera apparents les tracés de construction **sur l'annexe 2** mais la méthode employée et les explications concernant cette construction devront être détaillées dans la copie.*