Poursuites

Gilles Marbeuf, Françoise Hérault (Lycée Jacques Prévert, 95150 Taverny)

Séance 1

1. **Films :**

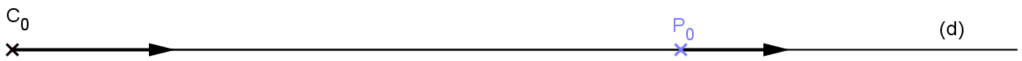
Voici quelques exemples de poursuites entre « une proie » et un « chasseur ».
Après avoir visionné ces films, demander aux élèves (par groupes de 3) de décrire ces différentes poursuites et d'expliciter les différences.
On attend de leur part :
- qu'ils tracent à main levée les trajectoires de la proie et du chasseur
- qu'ils remarquent que dans le cas de Bip Bip (poursuite sur une même droite) le chasseur se contente de poursuivre (il n'y a que le rapport entre sa vitesse et celui de la proie qui entre en jeu)
- qu'ils remarquent que dans le cas du ball-trap il y a l'idée d'anticipation (vitesse et angle) et que le chasseur peut attraper la proie (ball-trap) ou la rater (mauvais angle ou pas dans les temps) . Faire alors la différence entre les deux trajectoires qui se coupent alors que le chasseur rate la proie (il n'y a pas interception (notion de temps))
- qu'ils remarquent que dans le cas du guépard le chasseur adapte sa trajectoire tout au long de la poursuite (il peut la rater ou l'attraper).

1) Ball-trap
2) Bip Bip
3) Guépard
4) Plage

2. **But de cette activité** : Étudier différentes stratégies possibles pour le chasseur et chercher à les modéliser pour pouvoir en faire des animations (sur géogébra) (dans l'optique d'un jeu par exemple).

3. **Partons sur un 1^er^ exemple simple :**

La proie P part d'une position P_0 et se déplace à la vitesse constante v_p sur une droite (d) toujours dans la même direction. Le chasseur C part d'une position C_0 sur (d) et poursuit P à vitesse constante v_c en restant sur (d) . La distance C_0P_0 est connue. Le chasseur doit rattraper la proie dans un certain délai.



a. Animation :

Question aux élèves : De quoi a-t-on besoin pour créer une animation sur géogébra ?
La droite (d), les positions initiales P_0 et C_0 sur (d) , la vitesse de la proie v_p et la vitesse v_c du chasseur, et enfin de la notion de temps obtenu avec curseur.

On décide pour tout le monde que :

la droite (d) est l'axe des abscisses, que C_0 (0 ;0), que C_0P_0 = 20 m, que v_p= 2m/s et que t $\in$[0 ;5] (en s).
Chacun choisit v_c .

b. Quelles remarques peut-on faire ? En comparant les différentes animations des élèves
- si $v_c < v_p$ alors le chasseur ne rattrape pas la proie : évident.
- Même lorsque $v_c > v_p$, le chasseur ne rattrape pas toujours la proie dans le temps imparti.
  Pour quelles valeurs de v_c le chasseur semble-t-il rattraper toujours la proie dans le temps imparti ?
  Nécessité de créer un curseur pour v_c pour tester.

Séance 2

c. Soit T la durée en secondes de la poursuite (lorsqu'il y a interception).
Comment évolue T en fonction de v_c ?
Pour cela : relever différents couples (v_c ; T), ouvrir une 2ème fois géogébra et renseigner le tableur avec ces couples et faire tracer le nuage de points correspondant.
Remarques graphiques et remarque sur la non proportionnalité entre v_c et T.
Les élèves pensent assez vite à un arc d'hyperbole.

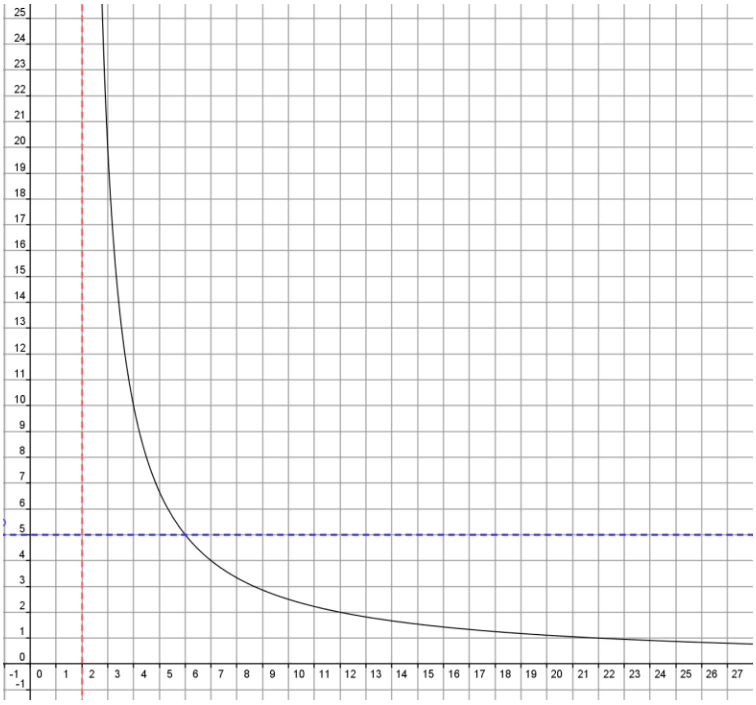
d. Il semble qu'il existe une relation fonctionnelle entre V_C et *t* : trouvons- la.
Soit T la durée en secondes de la poursuite (lorsqu'il y a interception)
$d_c = d_P + C_0P_0 \Leftrightarrow V_C T = V_p T + C_0P_0 \Leftrightarrow T = \dfrac{20}{v_C - 2}$: la faire tracer dans la 2ème fenêtre de géogébra

Dans le temps imparti : $T < 5$

$$\frac{20}{v_C - 2} < 5$$

$$V_C > 6$$

Fonction de la forme $f : x \longmapsto \dfrac{20}{x-2}$



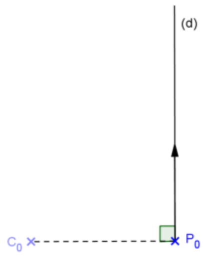
Demander tous les résultats que l'on peut retrouver grâce à cette représentation graphique.

Illustrer ensuite avec le fichier sur géogébra béta (graphiques 1 et 2)

Séance 3

4. Un $2^{ème}$ exemple :

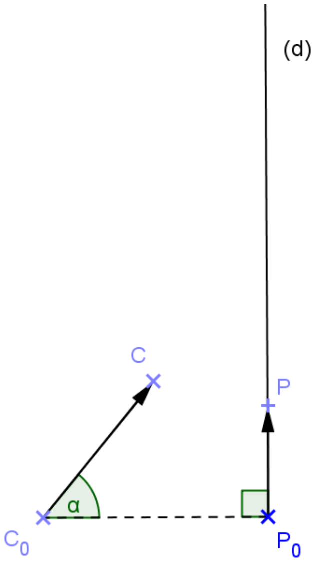
La proie P part d'une position P_0 et se déplace à la vitesse constante v_p sur une droite (d) toujours dans la même direction. Le chasseur C tente d'intercepter P sur (d) en partant de la position initiale C_0 qui n'est pas sur (d) et telle que $(C_0P_0) \perp$ (d) en P_0 et C_0P_0 est connue, à la vitesse constante V_C . On n'impose pas de délai au chasseur.



$1^{ère}$ situation : C garde toujours la même trajectoire rectiligne : anticipation.

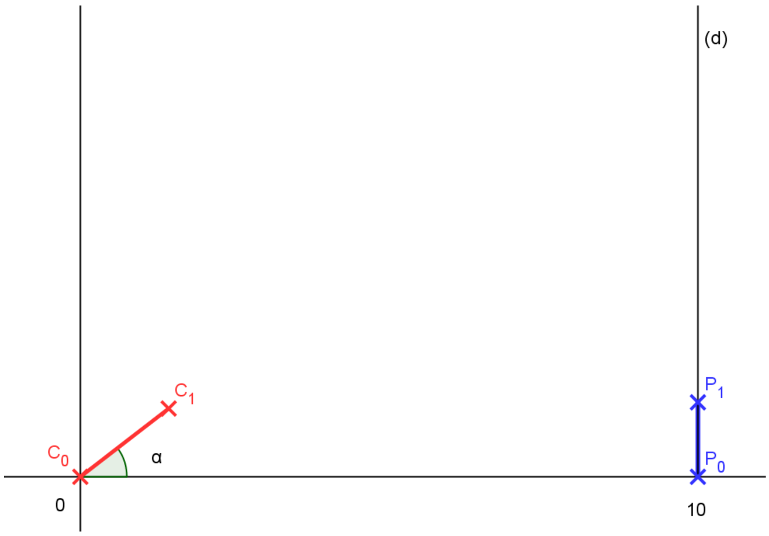
a. Animation sur géogébra : Dans l'optique d'un jeu : on doit deviner l'angle pour aller intercepter

Question aux élèves : De quoi a-t-on besoin pour créer une telle animation sur géogébra ?



La droite (d), les positions initiales P_0 et C_0 , la vitesse de la proie v_p et la vitesse v_c du chasseur, l'angle α en degrés : angle géométrique formé par la trajectoire rectiligne du point C et la droite (C_0 P_0) et la notion de temps .

Après débat, on décide pour tout le monde que :
C_0 (0 ;0), la distance C_0P_0 = 10, P_0 est sur l'axe des abscisses, la droite (d) est perpendiculaire à l'axe des abscisses en P_0 , v_p= 2m/s , v_c est pilotée par un curseur, l'angle α est piloté par un curseur et le temps t est piloté par un curseur.



Faire décomposer le mouvement :

- Coordonnées de C_1 et P_1 au bout de t= 1 s
  $C_0C_1 = 1 \times V_C$ et $P_0P_1 = 1 \times V_p = 2$
  C_1 ($V_C \cos \alpha$; $V_C \sin \alpha$)
  P_1 (10 ; 2)
- Coordonnées de C_2 et P_2 au bout de t= 2 s
  $C_0C_2 = 2 \times V_C$ et $P_0P_2 = 2 \times V_p = 4$
  C_2 ($2 V_C \cos \alpha$; $2 V_C \sin \alpha$)
  P_1 (10 ; 4)

- Coordonnées de C et P au bout de t s :
C ($V_C\, t \cos \alpha$;$V_C\, t \sin \alpha$)
P (10 ; 2 t)

(Trigonométrie dans triangle rectangle)

Demander alors aux élèves de créer l'animation.
Demander le plan de construction de cette animation : dans quel ordre peut-on créer les différents éléments ?

- C_0 et P_0
- (d) $\perp$ (C_0P_0)
- curseur α : en ° dans intervalle [0 ;90] incrément au choix (modifiable par la suite)
- curseur V_C : dans intervalle [0 ; ……] incrément au choix (modifiable par la suite)
- curseur t : dans intervalle [0 ; ……] incrément au choix (modifiable par la suite)
- P (10 ; 2 * *t*) et C (V_C **t* *cos (α) ;V_C **t* *sin (α))
- segments [C_0C] et [P_0P] (en couleur)

$\boxed{\textbf{Séance 4}}$

b. <u>Remarques et conjectures :</u> y a-t-il toujours interception ? ça dépend de v_c et α .

Essayer de trouver au moins un couple un couple (v_c ; α) qui convient.

Faire remarquer qu'il peut être intéressant d'avoir l'affichage de la distance CP et modifier si nécessaire les incréments des curseurs V_C , t et α

Faire conjecturer les élèves sur :

- existe-t-il des valeurs de V_c pour lesquelles il n'y a pas interception ?
- existe-t-il des valeurs de α pour lesquelles il n'y a pas interception ?
- A chaque angle α choisi , il semble ne correspondre qu'une seule vitesse v_c
- A chaque vitesse v_c choisie supérieure strictement à V_p, il semble ne correspondre qu'un seul angle α

Il semble donc qu'il existe une relation fonctionnelle entre v_c et α ?

Pour cela, demander aux élèves de relever différents couples (v_c ; α) qui permettent l'interception et construire avec une 2ème session de géogébra le nuage de points correspondant.

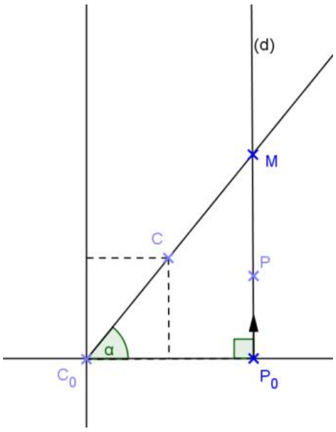
Ce nuage de points permet-il de conforter les conjectures précédentes ?
d'en faire d'autres ?

Conjecture sur la relation fonctionnelle entre v_c et α ?

b. Les élèves pensent que $\alpha = f(V_c)$ avec f fonction inverse.

Vérifions par le calcul si effectivement α est du type fonction inverse de V_c?

Dans le repère orthonormé (C_0 ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) les coordonnées de P_0 (10 ; 0) , de P sont (10 ; $V_P t$) et celles de C sont ($V_C t \cos\alpha$; $V_C t \sin\alpha$)



Il y a interception si et seulement si $x_P = x_C$ et $y_P = y_C$

- $x_P = x_C \Leftrightarrow C_0P_0 = V_C t \cos\alpha \Leftrightarrow t = \dfrac{10}{V_C \cos\alpha}$: ceci est le temps nécessaire au chasseur pour que sa trajectoire coupe celle de la proie pour une vitesse V_C et un angle α choisis.
- Pour cette valeur de t : $y_P = V_P t = 2\dfrac{10}{V_C\cos\alpha}$

  et $y_C = V_C t \sin\alpha = V_C \dfrac{C_0P_0}{V_C\cos\alpha}\sin\alpha = 10\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

  $y_P = y_C \Leftrightarrow 2\dfrac{C_0P_0}{V_C\cos\alpha} = 10\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{2}{V_C} = \sin\alpha$

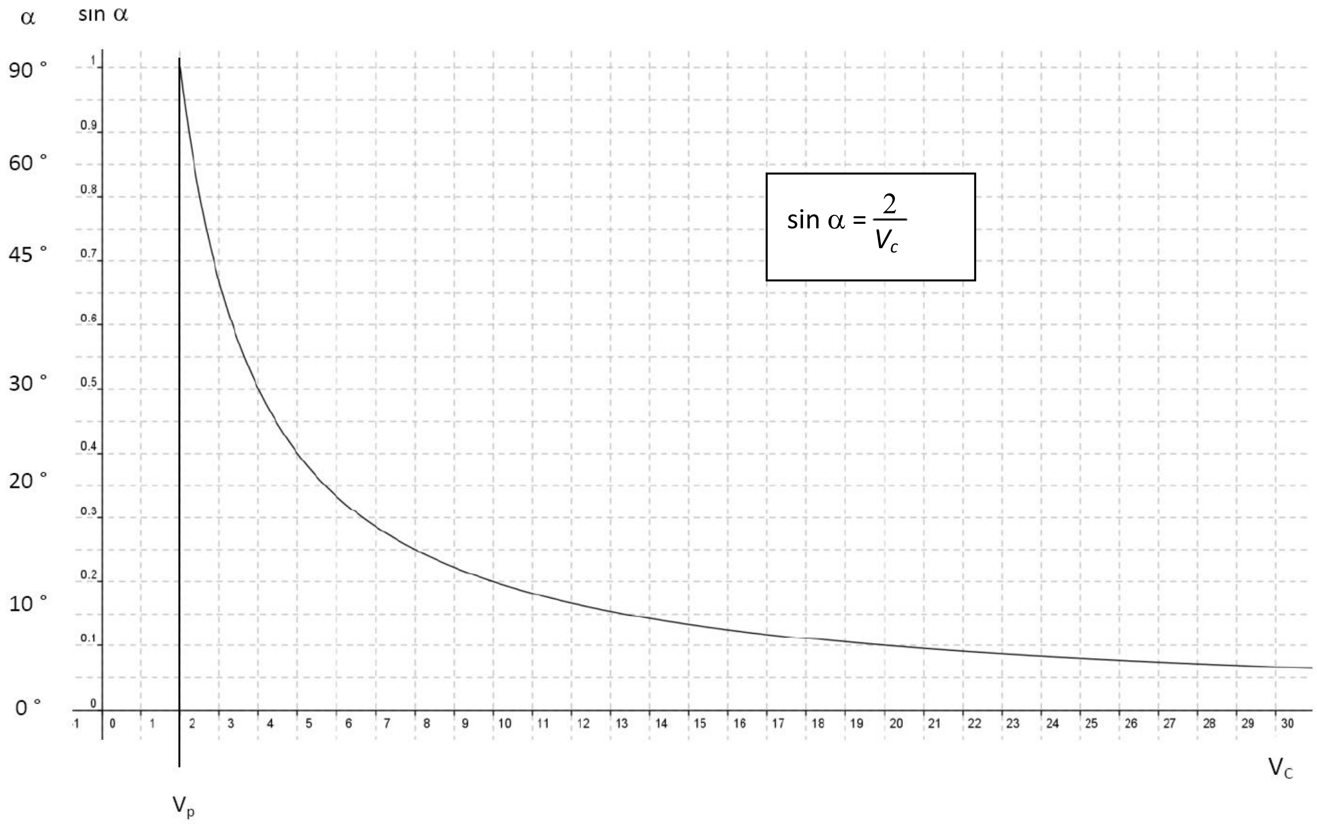
Séance 5

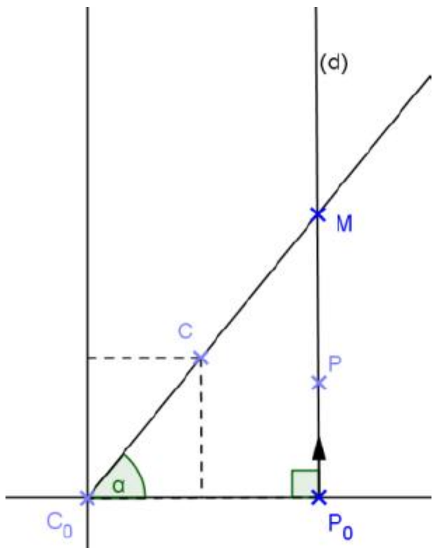
En fait c'est sin α qui est fonction inverse de V_c : $\sin\alpha = \dfrac{2}{V_c}$!

Revenir à la fenêtre géogébra et modifier les ordonnées des points du nuage en remplaçant α par sin(α °).

Et faire tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$.

Synthèse : revenir à chaque conjecture émise pour validation : confronter la formule $\sin\alpha = \dfrac{2}{V_c}$; le nuage de points et l'animation





- Plus V_c augmente et plus sin α diminue et plus α diminue (à visualiser sur le cercle trigonométrique car plus du programme de seconde mais de 1[ère] S)

- Pour une vitesse V_c choisie , il y a interception si $\alpha \in]0°;90°[$ avec sin $\alpha = \frac{2}{V_c}$: il faut donc que $V_c > 2$ ie $V_c > V_p$ pour avoir sin $\alpha < 1$ (ne peut pas être égal à 1 car $\alpha \neq 90°$).

- Plus V_c est proche de V_p et plus sin α est proche de 1 et plus l'angle α est proche de 90°.

- Plus V_c est très grand et plus sin α est proche de 0 et plus l'angle α est proche de 0°.

Faire remarquer que avec sin $\alpha = \frac{V_P}{V_C}$, l'interception ne dépend pas de C_0P_0 : l'interception se fera avec le même couple (V_C , α) mais avec une durée différente (montrer une animation géogébra avec C_0P_0 modifiable avec un curseur).

Séance 6

2nde situation : C a toujours une vitesse constante et change régulièrement sa trajectoire pour adapter sa course à celle de la proie: adaptation.

La proie se déplace toujours à vitesse constante égale à 2 sur une trajectoire rectiligne .

- Visionnage à nouveau du film sur le guépard pour décrire ce nouveau type de poursuite : à tout moment le guépard voit sa proie et va dans sa direction.

- Construction « à la main » sur feuille de papier millimétrée en repère orthonormé des différentes positions de C et P :

  - toutes les 1 seconde

  - toutes les 0,5 seconde

Séance 7

- Sur géogébra : comment faire les constructions des différentes positions de C et P toutes les t secondes avec t modifiable et pour une vitesse V_C modifiable , V_p étant toujours fixée à 2 ? *utilisation d'un curseur t et d'un curseur* V_C.

  - sans macro : Construction point par point de P_n et de C_n

    - Les différentes positions P_n sont obtenues :
      - en entrant leurs coordonnées dans la barre de saisie ou dans le tableur
      - ou par translation : on crée d'abord le vecteur u =(0,2*t) puis avec l'icône translation P_n est le translaté de P_{n-1} en utilisant l'icône translation ou la commande Translation[Point,vecteur]

      Les différentes positions C_n sont obtenues par intersection du cercle de rayon $V_C \times t$ et de la demi-droite $[C_{n-1} P_{n-1})$.

      Faire quelques constructions. Faire varier les curseurs.

    - Un peu fastidieux ! Alors on peut :
      - garder la même construction des points P_n
      - entrer dans la ligne de saisie pour les points C_n :
      C_1=Intersection[DemiDroite[C_0,P_0],Cercle[C_0,V*t]]
      pour construire C_1 à partir de C_0 et P_0 :
      Les avantages : nomme les points correctement, évite de surcharger la figure avec les constructions annexes, et surtout donne l'idée de la macro (de l'algorithme de construction) car pour construire C_2 , il suffit de rappeler la ligne dans la barre de saisie et remplacer C_1 par C_2 , C_0 par C_1 et P_0 par P_1 ...

- <u>avec une macro</u> : <u>Construction point par point</u>

- On garde la même construction des points P_n (icône translation)
- On crée une macro-construction pour les points C_n . Pour cela :
  - on crée P_1 et C_1 comme précédemment (et faire tracer le segment $[P_1C_1]$).
  - Dans menu « Outils » « Créer un nouvel outil »
  Objets Finaux : C_1 (et le nom du segment créé)
  Objets initiaux : C_0 , P_0 , V et t
  Nom de l'outil : chasse
  Nom de la commande : chasse
  Aide pour l'outil : chasseur, proie, V, t
  - Pour créer C_2 : cliquer sur l'icône de la macro « chasse » et suivre l'aide (chasseur, proie, V, t).
  - Créer P_2 puis rappeler la macro pour créer C_3 ….

  <u>Remarque</u> : les points ne sont pas nommés correctement

- <u>avec le tableur intégré</u> : <u>Construction en bloc</u>

- Supposons vecteur $\overset{o}{u}$,C_1 et P_1 déjà construits et la macro créée :

Pour que les points créés se nomment C_2, C_3 …..

	B	C	D
1	$=P_1$	$=C_1$	=Distance[B1,C1]
2	=Translation[B1,u]	=chasse[C1,B1,V,t]	
3			
4			
5			

A recopier vers le bas

On peut créer une colonne distance entre les points C_n et P_n pour savoir plus facilement si la poursuite est terminée ou non.

- Si la macro n'est pas créée : c'est-à-dire que l'on part de C_1 et P_1 et vecteur $\overset{o}{u}$ construits.

	B	C
1	$=P_1$	$=C_1$
2	=Translation[B1,u]	=Intersection[DemiDroite[C1,B1],Cercle[C1,V*t]]
3		

Formules à recopier vers le bas

Attention cela crée un décalage d'indice car le 1er point C créé sera appelé C2 ….
On peut aussi créer une colonne distance entre les points C_n et P_n

<u>En conclusion</u> : montrer aux élèves les deux poursuites (anticipation et adaptation) sur le même fichier géogébra (version 4 béta). Faire alors remarquer aux élèves :

Avantage de l'anticipation : plus rapide

Inconvénient : si la proie change de trajectoire, anticipation plus du tout efficace alors que la macro courbe du chien est inchangée. Idem s'il y a changement de vitesse de la proie.
Le montrer en changeant de temps en temps le vecteur de translation du déplacement de la proie, la macro convient toujours.

<u>Prolongement proposé:</u>

Créer sur géogébra des poursuites avec adaptation lorsque la proie change régulièrement de direction (se déplace sur un cercle ou sur une courbe de fonction affine par morceaux ….).