Thème : Fonctions du second degré, suites et informatique
Titre : Rebonds d'une balle
Auteur : BRO FRÉDÉRIC
Objectifs :

- ▷ Programmer en PYTHON.
- ▷ Modéliser et étudier la trajectoire des rebonds d'une balle et la suite de ses hauteurs.
- ▷ Utiliser de façon pertinente l'expression d'un polynôme du second degré, reconnaître la nature d'une suite, effectuer le calcul d'une somme.

Une balle est posée au départ au sol. A l'instant $t = 0$, elle part du sol avec une vitesse verticale, notée v_0, égale à 3 m.s^{-1}.
Une animation de son mouvement est visible depuis le lien suivant :

http ://maths.bro.free.fr/ap_ts_466.htm

Modélisation du mouvement :

L'altitude du centre de la balle à l'instant t est repérée par $y(t)$ et est exprimée en mètre.

- On suppose que $y(0) = 0$.
- On note :
  - $t_0 = 0$, t_1, t_2, ..., les temps respectifs où la balle est au sol, c'est à dire $y(t_0) = y(t_1) = y(t_2) = 0$ ...
    Ainsi t_n est le temps où la balle effectue son n-ième rebond.
  - $v_0 = 3$, v_1, v_2, ..., les vitesses verticales de la balle à chaque rebond.
  - k est le coefficient d'élasticité : $k = \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{v_2}{v_1} = ...$
    (En touchant le sol, la balle perd de son énergie en créant de la chaleur suite au choc et sa vitesse est réduite avec comme coefficient multiplicateur $k \in]0;1[$).
- A l'aide du principe fondamental de la dynamique de NEWTON, on admet que pour tout $t \in [t_n ; t_{n+1}]$:
  $$y(t) = -\frac{1}{2}g(t-t_n)^2 + v_n(t-t_n),$$
  avec $g = 9{,}81$ m.s^{-2} *(qui correspond à l'accélération de la pesanteur).*

Partie A : Conjectures

1. Temps de rebonds :

a. En utilisant $y(t_{n+1}) = 0$, justifier que $t_{n+1} - t_n = \dfrac{2v_n}{g}$.

b. Déterminer la relation de récurrence que vérifie la suite (v_n).

2. Hauteur maximale entre deux rebonds :

a. Charger le module **pylab** en préambule.

b. Créer deux variables `k` et `g` prenant respectivement les valeurs $0{,}9$ et $9{,}81$.

c. Écrire la fonction nommée **f** ayant pour paramètres `t`, `t_n` et `v_n` et qui renvoie l'altitude de la balle à l'instant t compris entre t_n et t_{n+1}.

d. Écrire la fonction nommée **temps_rebond** ayant pour paramètres `t_n` et `v_n` et qui renvoie le temps t_{n+1}.

e. Voici la fonction nommée **courbe_entre_rebonds** ayant pour paramètres `t_n`, `v_n` et `t_a` *(qui contiendra la valeur de t_{n+1})*.
Elle permet de tracer la courbe de l'altitude de la balle lorsque $t \in [t_n\,;t_{n+1}]$.

```
In [5]: def courbe_entre_rebonds(....,.........,....):
            T=[t_n+k/1000*(t_a-t_n)]
            Y=.......................................
            pl.plot(T,Y,color='blue')
```

i. Combien de valeurs la liste `T` contient-elle ? Préciser ses valeurs extrêmes.

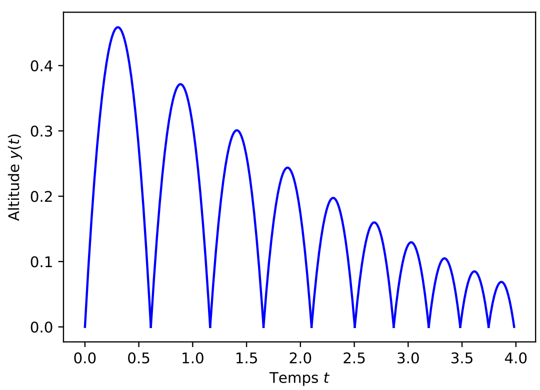
ii. Compléter les instructions en pointillés.

f. Compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de représenter l'altitude de la balle lorsque $t \in [0;t_{10}]$:

```
In [6]: v=3
        t_n=0
        for n in range(.....):
            t_a=temps_rebond(.........,.....)
            courbe_entre_rebonds(....,.........,.....)
            v=.....
            t_n=.....

        pl.show()
```

On obtiendra le graphique suivant :



Entre deux rebonds, la balle atteint sa hauteur maximale.
Ainsi sur l'intervalle $[t_n\,;t_{n+1}]$, cette hauteur est notée h_n.

g. Écrire la fonction nommée **hauteur** ayant pour paramètres `t_n` et `t_a` et `v_n` et qui renvoie h_n.

h. Écrire un algorithme qui calcule les différentes valeurs de h_n pour n allant de 0 jusque 20 et stocke ces nombres dans une liste `L`.

i. Conjecturer la nature de la suite

Partie B : Preuves

1. Temps de rebonds :

a. Déterminer la nature de la suite (v_n), puis exprimer v_n en fonction de k et de n.

b. Justifier que $t_n = \dfrac{6}{g} \times \dfrac{1-k^n}{1-k}$.

2. Hauteur maximale entre deux rebonds :

a. Justifier que $y(t) = -\dfrac{1}{2}g(t-t_n)(t-t_{n+1})$.

b. En déduire que $h_n = \dfrac{2v_n^2}{g}$.

c. Conclure.

Partie C : Déplacement de la balle

— L'abscisse de la balle à l'instant t est notée $x(t)$.

— On note V_0, V_1, V_2, ..., la vitesse horizontale de la balle à chaque rebond.
On admet que $V_{n+1} = kV_n$, quel que soit l'entier n.

— A l'aide du principe fondamental de la dynamique de NEWTON, on admet que pour tout $t \in [t_n\,; t_{n+1}]$:

$$x(t) = x(t_n) + V_n(t - t_n).$$

1. On suppose que $V_0 = 0,5$. Déterminer la liste des abscisses prises par la balle, notée `X`, lorsque $t \in [0\,; t_{10}]$.

2. Représenter la courbe associée à la position de la balle, lorsque $t \in [0\,; t_{10}]$.

3. Comment peut-on caractériser le mouvement de la balle ?