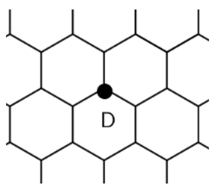
Promenade dans la ruche

Questions	Eléments de correction	Barème 50 pts
1.	a) chemin de longueur 7 – auto-évitant b) chemin de longueur 18 – non c) chemin de longueur 16 – auto-évitant d) chemin de longueur 13 – non	**6** (1+0,5 pour chaque figure)
2. a)	$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 27$	**0,5+1+1,5**
2. b)	$a_n = 3^n$ pour tout $n \geq 1$ A chaque sommet, il y a 3 choix possibles pour le déplacement.	**3**
3. a)	$b_1 = 2 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 2^2 = 4$	**0,5 + 1 + 1,5**
3. b)	$b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}\ si\ n\ impair \\ 2^{\frac{n}{2}}\ si\ n\ pair \end{cases}$	**3+3**
3. c)	Tous les chemins sont auto-évitants puisque les déplacements ne s'effectuent que "vers le haut" donc sans possibilité de retour en arrière.	**1**
4. a)	$c_1 = 3 \qquad c_2 = 3 \times 2 = 6 \qquad c_3 = 3 \times 2^2 = 12$ $c_4 = 3 \times 2^3 = 24 \qquad c_5 = 3 \times 2^4 = 48$	**3**
4. b)	On peut supposer que $c_n = 3 \times 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$	**3**
4. c)	Chaque chemin auto-évitant de longueur 5 peut être prolongé de deux façons différentes en un chemin de longueur 6. Parmi les chemins de longueur 6 ainsi formés, six d'entre eux ne sont plus auto-évitants: ce sont les chemins qui forment les trois hexagones avec pour sommet D parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire. On a donc $c_6 = 3 \times 2^6 - 6 = 90$. La conjecture n'est donc pas validée.	**5**
5.	Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n est inclus dans l'ensemble des chemins de longueur n donc $c_n \leq 3^n$ Par ailleurs, si D est placé comme dans la question 3, les chemins auto-évitants de longueur n composés uniquement de déplacements vers le haut sont inclus dans l'ensemble des chemins auto-évitants. On a: $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}\ si\ n\ impair \\ 2^{\frac{n}{2}}\ si\ n\ pair \end{cases}$ donc pour tout n, $b_n \geq 2^{\frac{n}{2}}$ Donc $2^{\frac{n}{2}} \leq b_n \leq c_n$ De même si D est placé sur « une pointe », on procède de la même manière en comptant le nombre de chemins auto-évitants de longueur n composés uniquement de déplacement vers le bas.  Donc pour tout $n \geq 1$, on a bien $2^{\frac{n}{2}} \leq c_n \leq 3^n$	**4** pour l'inégalité de droite **4** pour l'inégalité de gauche dans le cas D en creux **5** pour l'inégalité pour le cas D en pointe
6.	Cet algorithme permet de dénombrer le nombre de chemins auto-évitants de longueur n. Pour $n = 5$, l'algorithme affiche c_5 soit 48.	**4**