

Géométrie, courbure et probabilités

ou comment aller de Paris à Tokyo et concilier les goûts musicaux de vos amis.

Thomas Guilmeau

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, Inria, CVN

8 Mars 2022

Géométrie à plat

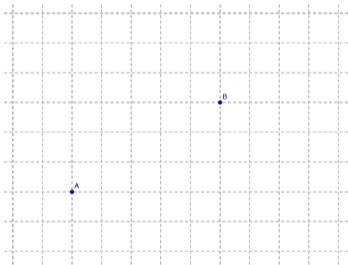


- 300 av. J.C.

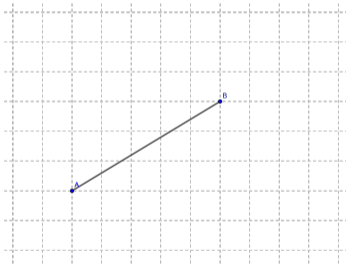


Sur une feuille de papier

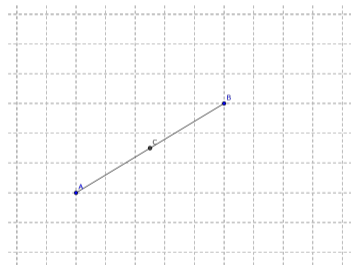
Deux points A et B :



Le segment $[AB]$



Le milieu de A et B



Mais certains espaces sont courbés

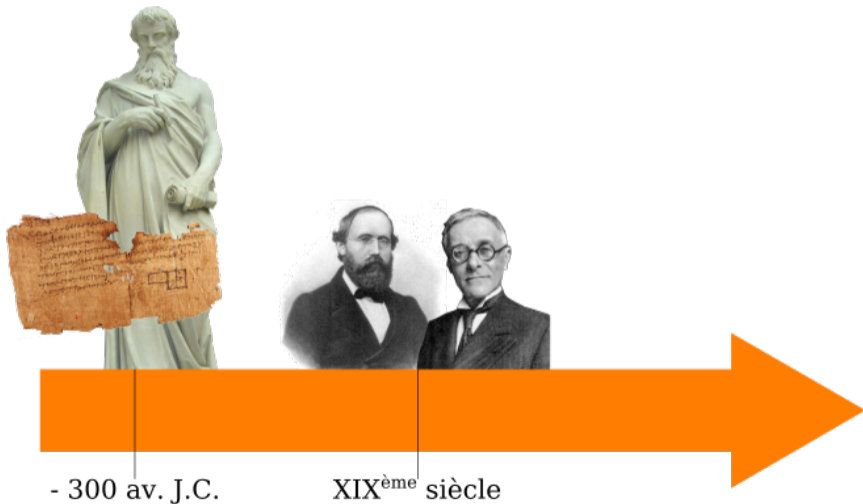
On a l'habitude de voir la Terre comme ça:



Mais elle ressemble plus plutôt à ça:



Géométrie et courbure



Aller de Paris à Tokyo sans courbure

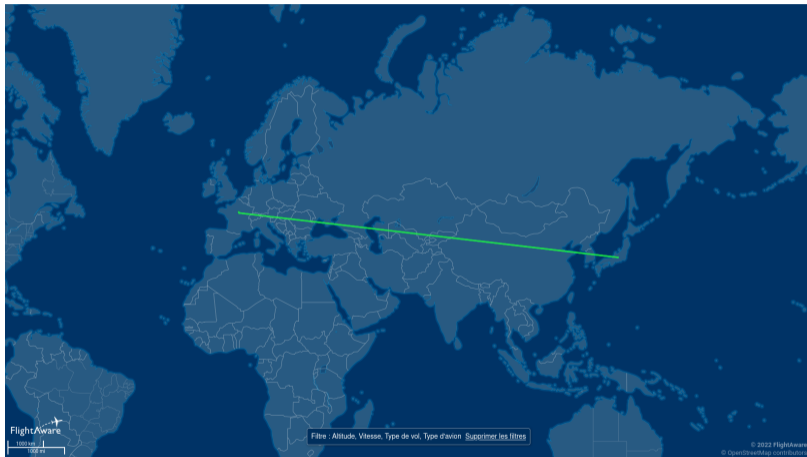


Figure: Plus court chemin entre Paris et Tokyo ?

Aller de Paris à Tokyo avec la courbure

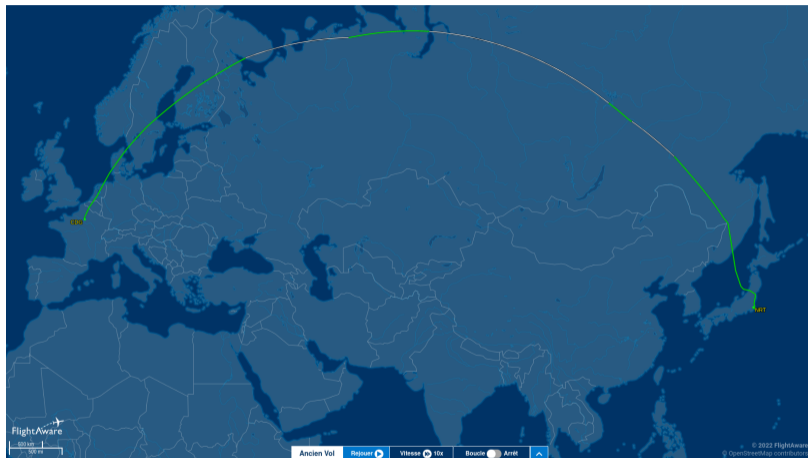


Figure: Voici le vrai plus court chemin !

Géométrie et probabilités ?



Petit rappel sur les probabilités

Les probabilités servent à décrire des phénomènes incertains.

Lorsque plusieurs événements peuvent se produire, on décrit la possibilité plus ou moins grande qu'ils ont d'arriver par une loi de probabilité.

Par exemple, si trois événements I , J et K peuvent se produire, on leur donne les probabilités p_I , p_J et p_K , telles que

$$\begin{cases} p_I, p_J, p_K \geq 0, \\ p_I + p_J + p_K = 1. \end{cases}$$

- Si un événement a une probabilité égale à un, on dit que c'est un événement certain.
- Si tous les événements ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.
- Si on répète l'expérience 1000 fois, l'événement I se sera produit environ $1000p_I$ fois, l'événement J $1000p_J$ fois et l'événement K $1000p_K$ fois.

Les probabilités et vous

A chaque fois que vous vous connectez à un site de streaming, vous choisissez d'écouter:

- de l'indie rock avec la probabilité p_I ,
- du jazz avec la probabilité p_J ,
- de la K-pop avec la probabilité p_K ,
- avec $p_I + p_J + p_K = 1$.

"Écouter du rock" est un événement certain:

$$p_I = 1, p_J = 0, p_K = 0.$$

Les trois événements sont équiprobables:

$$p_I = 1/3, p_J = 1/3, p_K = 1/3.$$

Deux profils

A adore le rock, écoute du jazz de temps en temps et n'écoute jamais de K-pop:

- $p_I^A = 0.8$,
- $p_J^A = 0.2$,
- $p_K^A = 0$.

B est fan de K-pop, mais écoute régulièrement d'autres styles musicaux:

- $p_I^B = 0.1$,
- $p_J^B = 0.5$,
- $p_K^B = 0.4$.

Vos goûts musicaux sont sur une surface courbe

On doit avoir:

$$\begin{cases} \rho_I, \rho_J, \rho_K \geq 0, \\ \rho_I + \rho_J + \rho_K = 1. \end{cases}$$

Changement de coordonnées:

$$\rho_I = \sqrt{p_I}, \quad \rho_J = \sqrt{p_J}, \quad \rho_K = \sqrt{p_K}.$$

Les conditions précédents deviennent

$$\begin{cases} \rho_I, \rho_J, \rho_K \geq 0, \\ \rho_I^2 + \rho_J^2 + \rho_K^2 = 1. \end{cases}$$

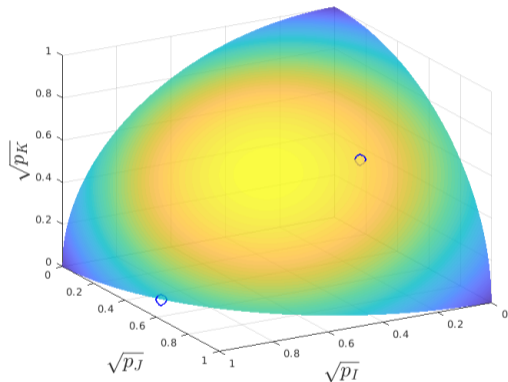


Figure: Portion de sphère représentant les préférences musicales, avec les points ρ^A et ρ^B .

Comment concilier A et B autour d'une playlist commune ?

On va essayer de trouver le milieu de A et B sur la sphère.

Un peu de calcul

$$\bar{\rho}_I = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\rho_I^A} + \frac{1}{2} \sqrt{\rho_I^B} \right)^2,$$

et on obtient

- $\bar{\rho}_I = 0.46$,
- $\bar{\rho}_J = 0.42$,
- $\bar{\rho}_K = 0.12$.

Remarque: $\bar{\rho} \neq \frac{1}{2}\rho^A + \frac{1}{2}\rho^B$!

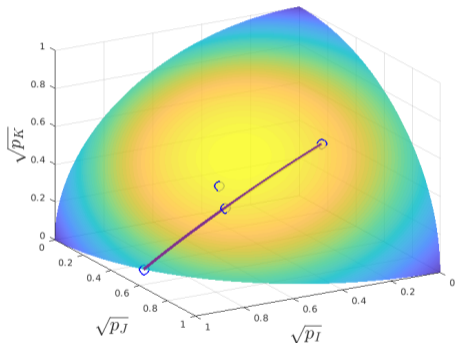
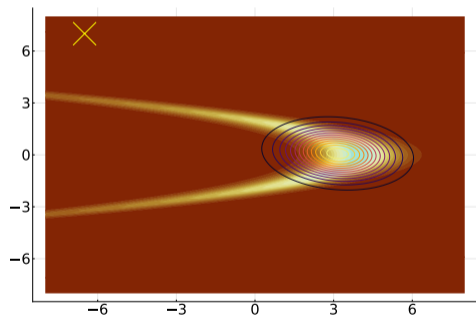
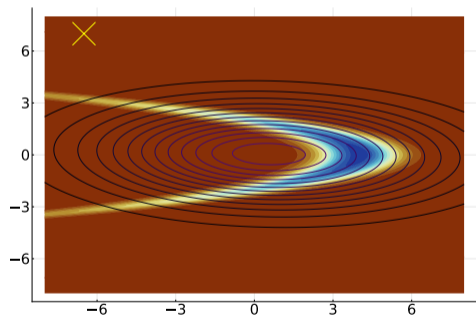


Figure: Les points ρ^A , ρ^B et leur milieu $\bar{\rho}$.

Conclusion

Une partie de mon travail de thèse consiste à trouver des lois de probabilités "simples" qui sont capable d'approximer des lois de probabilités "compliquées". Et pour faire ça, j'utilise ce que je vous ai montré !



Merci pour votre attention !
Des questions ?