ACADÉMIE DE CRÉTEIL
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades $4^{ème}$
Mathématiques
Académie de Créteil
93 77 94

Durée de l'épreuve : 2 heures
Le sujet est à rendre à l'issue de l'épreuve
La calculatrice est autorisée
L'annexe, fournie avec le sujet, est à rendre avec la copie

Exercice 1 – REPETITION D'UN NOMBRE

On définit la répétition d'un nombre entier naturel non nul comme dans le cadre ci-dessous :

Définition : On considère un nombre entier naturel n non nul. On appelle **répétition de $\boldsymbol{n}$** notée $\boldsymbol{R_n}$, le nombre dont l'écriture est formée du nombre n répété n fois.

Exemples :

- Pour $n = 5$, sa répétition R_5 s'écrit 55 555.
- Pour $n = 14$, sa répétition R_{14} s'écrit 1 414 141 414 141 414 141 414 141 414.

1) a) Ecrire R_9 et R_{10}.

b) Au total, combien y-a-t-il de chiffres dans l'écriture des nombres R_9 ; R_{10} et R_{23} ?

c) Au total, combien y-a-t-il de chiffres dans l'écriture du nombre $R_{1\,072}$? Justifier.

d) Soit n un entier naturel non nul. Au total, combien y a-t-il de chiffres dans l'écriture du nombre R_n? Justifier

2) a) Pourquoi R_8, R_{10} et R_{12} sont-ils divisibles par 2 ?

b) $R_{1\,072}$ est-il divisible par 2 ? Justifier.

c) Soit n un entier naturel non nul. À quelle condition R_n est-il divisible par 2 ? Justifier.

3) a) R_6 et R_8 sont-ils divisibles par 4 ?

b) Justifier que $R_{1\,072}$ est divisible par 4.

c) Soit n un entier naturel non nul, à quelle condition R_n est-il divisible par 4 ? Justifier.

4) On considère pour la suite le nombre $R_{2\,022} = 202\,220\,222\,022 \ldots 202\,220\,222\,022$

a) Au total, combien y-a-t-il de chiffres dans l'écriture du nombre $R_{2\,022}$?

b) Démontrer que $R_{2\,022}$ est divisible par 2.

c) Démontrer que $R_{2\,022}$ n'est pas divisible par 4.

d) Démontrer que $R_{2\,022}$ est divisible par 3.

e) $R_{2\,022}$ est-il divisible par 9 ? Justifier.

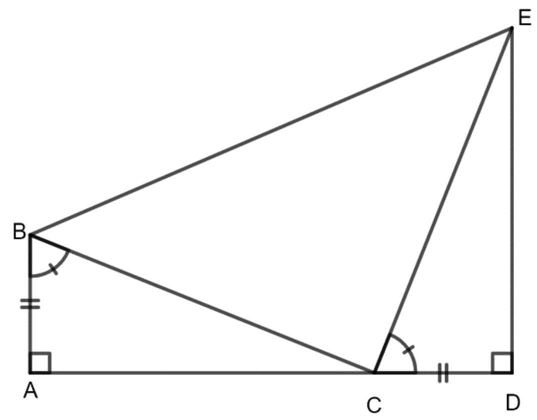
f)) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que si R_n est divisible par 3 alors R_n est divisible par 9.

5) Proposer trois nombres composés de 5 chiffres, pour lesquels leur répétition est divisible à la fois par 2, par 4, par 3 et par 9.

Exercice 2 – TRIANGLES RECTANGLES ET TRAPEZE

On considère la figure codée ci-contre dans laquelle :

- les points A, C et D sont alignés ;
- ABC est un triangle rectangle en A ;
- DCE est un triangle rectangle en D ;
- les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCE}$ sont de même mesure ;
- les côtés AB et CD sont égaux.



Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

<u>Partie 1</u> : propriétés de la figure

1) Montrer que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.
2) Montrer que les triangles ABC et DCE sont égaux.
3) Montrer que le triangle BCE est rectangle en C.

<u>Partie 2</u> : construction et calcul d'aires dans un cas particulier

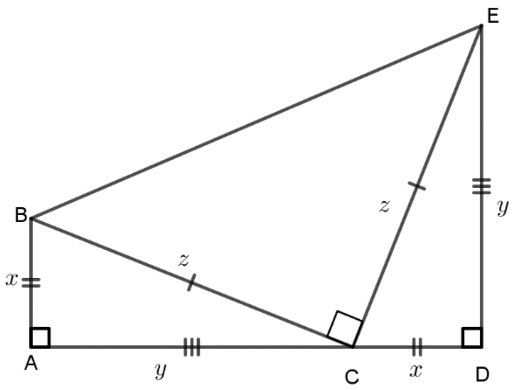
Dans cette partie, on suppose que

- $\widehat{ABC} = \widehat{DCE} = 60°$
- AB = CD = 4 cm

1) Représenter la figure en vraie grandeur sur la feuille blanche annexe.
2) Montrer que BC = CE = 8 cm.
3) Calculer l'aire du triangle rectangle BCE.
4) Montrer qu'une valeur approchée au cm² près de l'aire du quadrilatère ABED est égale à 60 cm².

<u>Partie 3</u> : calcul d'aires et démonstration d'une égalité

Dans cette partie, on pose AB = CD = x, AC = DE = y et BC = CE = z (où x, y, z désignent trois nombres)



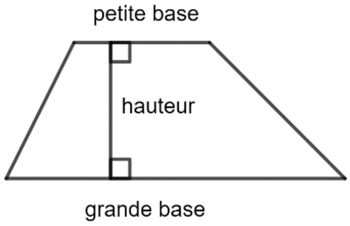
1) Exprimer z^2 en fonction de x et de y. Justifier la réponse.

2) Exprimer l'aire du quadrilatère ABED en fonction de x et de y :
   a) En utilisant l'aire des trois triangles rectangles de la figure.
   b) En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze rappelée dans les extraits de cours ci-dessous :

Définitions :

- Un trapèze est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles.
- Les deux côtés parallèles d'un trapèze sont appelés bases.
- Les longueurs des deux côtés parallèles d'un trapèze sont appelées bases.

Formule



$$Aire\ d'un\ trapèze = \frac{(Petite\ base + Grande\ base) \times hauteur}{2}$$

3) A l'aide des résultats précédents, en déduire l'égalité suivante : $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Fin – Bon Courage