Région académique
ÎLE-DE-FRANCE

académie Créteil

Olympiades 4ème
Mathématiques
Académie de Créteil

Durée de l'épreuve : 2 heures
Le sujet est à rendre à l'issue de l'épreuve
La calculatrice est autorisée
L'annexe, fournie avec le sujet, est à rendre avec la copie

Exercice 1 : les abeilles

Partie A : le nid des abeilles

Ci-dessous des définitions et propriétés utiles pour traiter cette partie A.

Définition :
Un polygone régulier est un polygone ayant tous ses côtés et tous ses angles de même mesure.

Propriété (admise) : tout polygone régulier est inscrit dans un cercle.
Par définition ce cercle est appelé le cercle circonscrit au polygone**,** son centre est appelé centre du polygone.

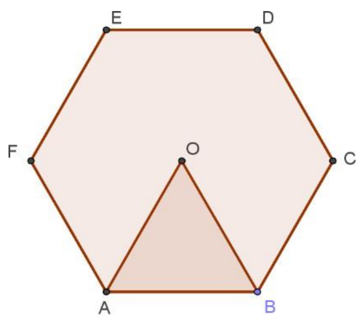
Propriété (admise) : aire d'un triangle.
Si *b* est la longueur d'un côté d'un triangle et *h* celle de la hauteur relative à ce côté, alors l'aire du triangle est $A = \frac{b \times h}{2}$

Les alvéoles des abeilles ont la forme d'hexagones réguliers, c'est-à-dire des polygones réguliers à 6 côtés.

L'objectif de cette **partie A** est de vérifier sur un exemple une partie du théorème suivant :

Théorème (dit du nid d'abeille) : l'hexagone régulier est le polygone de plus petit périmètre permettant de paver le plan.

On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O de côté 3 mm dont un agrandissement est représenté ci-contre.



1) Calculer le périmètre de l'hexagone ABCDEF.
2) Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier la réponse.
3) Calculer l'aire du triangle OAB.
4) Calculer une valeur approchée au mm² de l'aire de l'hexagone ABCDEF.
5) Compléter le pavage du plan figurant en **annexe 2** (on ajoutera au moins 4 autres hexagones et on laissera apparents les traits de construction).

6) Dans cette question, on considère que l'hexagone ABCDEF a pour aire 23,4 mm².

   a) On considère un carré de même aire. Calculer la longueur d'un de ses côtés et comparer son périmètre à celui de l'hexagone.

   b) On considère un triangle équilatéral de même aire que l'hexagone. Calculer la longueur d'un de ses côtés et comparer son périmètre à celui de l'hexagone.

   c) Faire le lien entre cette question et le théorème dit du nid d'abeille cité en introduction.

Partie B : le travail des abeilles

Ci-dessous une propriété et des rappels utiles pour traiter cette partie B.

Propriété (admise) : Volume d'un prisme droit
Si B est l'aire de la base d'un prisme droit et h la hauteur de ce prisme, alors le volume du prisme est $V = B \times h$.

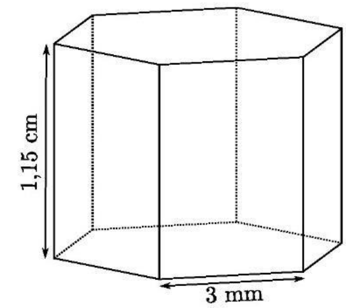
Rappels
1L = 1 dm^3
1µL = 10^{-6}L

Les abeilles ouvrières font des allers-retours entre les fleurs et la ruche pour transporter le nectar et le pollen des fleurs qu'elles stockent dans la ruche.

1) On considère une abeille butineuse pesant 110 mg. Sachant qu'elle peut porter jusqu'à 90% de sa masse de nectar et de pollen, calculer la masse de cette charge.

2) L'abeille stocke le nectar dans son jabot (une petite poche extensible sous l'abdomen) et le pollen (sous forme de pelotes) dans ses pattes. Sachant que le volume du jabot de cette abeille peut atteindre 75 µL et que 1 µL de nectar a une masse de 1,1 mg, calculer la masse maximale de nectar transportée par cette abeille.

3) Quand elles rentrent à la ruche, les abeilles déposent le nectar récolté dans des alvéoles (le pollen est mis de côté pour nourrir les jeunes abeilles).
On considère que ces alvéoles sont toutes identiques et ont la forme d'un prisme droit de 1,15 cm de hauteur et dont la base est un hexagone régulier de côté 3 mm. Un agrandissement est représenté ci-contre.
Vérifier qu'une valeur approchée au mm^3 du volume d'une alvéole est 269 mm^3.



4) Dans la réalité, les abeilles ne remplissent que chaque alvéole aux trois-quarts. Quelle masse de nectar contient chaque alvéole ?

5) On considère une colonie d'abeilles composée de 10 000 abeilles ouvrières effectuant chacune 10 allers et retours dans la journée. On suppose que chaque abeille transporte à chaque voyage 80 mg de nectar et que chaque alvéole contient 220 mg de nectar. Combien d'alvéoles seront remplies à la fin de cette journée ?

Exercice 2 : La divisibilité des sommes d'entiers naturels consécutifs

Définition : Des entiers naturels consécutifs sont des entiers naturels qui se suivent immédiatement dans la suite des entiers naturels. **Exemples :** Les nombres 13 et 14 sont des entiers naturels consécutifs. Les nombres 234 ; 235 et 236 sont des entiers naturels consécutifs.

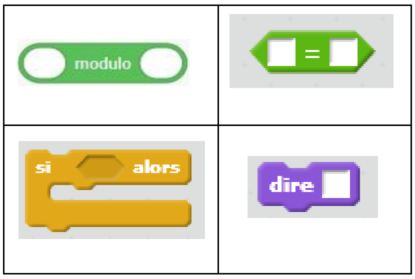
Ce problème porte sur des études de sommes d'entiers naturels consécutifs.

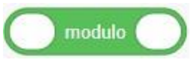
Partie A : la somme de trois entiers naturels consécutifs.
L'objectif de cette partie A est de démontrer la propriété suivante :

Propriété : La somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de trois.

1) **a)** Les nombres 17 ; 18 et 19 sont trois entiers naturels consécutifs. Calculer leur somme et vérifier la propriété.
b) Calculer quatre autres sommes de trois entiers naturels consécutifs et vérifier dans chaque cas la propriété.

2) Le script scratch figurant en **annexe 1** permet de calculer la somme de trois entiers naturels consécutifs.
a) Compléter les lignes incomplètes du script de **l'annexe 1.**
b) En utilisant les blocs figurant dans le cadre ci-contre, compléter le script pour qu'il permette de tester la divisibilité par trois de la somme de trois entiers naturels consécutifs.



Pour rappel le bloc 

donne le reste de la division euclidienne du premier nombre par le second.

3) Soit n un nombre entier naturel, $n \geq 1$
a) Exprimer, en fonction de n l'entier qui précède n et celui qui suit n dans la suite des entiers naturels
b) Démontrer la propriété.

4) Peut-on trouver trois entiers naturels consécutifs dont la somme est 105 ? dont la somme est 210 ? dont la somme est 2024 ? Si oui, préciser pour chaque cas ces entiers.

5) Montrer que tout entier naturel multiple de trois est la somme de trois entiers consécutifs (indication : on considérera un entier naturel n multiple de 3, c'est-à-dire pour lequel il existe un entier naturel k tel que $n = 3k$).

Partie B : vers une généralisation ?

1) La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de quatre ?
2) Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de cinq.
3) Conjecturer une propriété relative à une somme d'entiers consécutifs.

Partie C : la somme des 999 premiers entiers consécutifs.

Montrer que la somme que la somme des 999 premiers entiers consécutifs (c'est-à-dire 1+2+3+ …+997+998+999) est égale à 499 500.