MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Créteil

Mercredi 16 mars de 8 h à 12 h 10

- Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 heures.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*)

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10. Les quatre premières pages concernent les exercices nationaux et les six pages suivantes concernent les exercices académiques.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Échanges thermiques

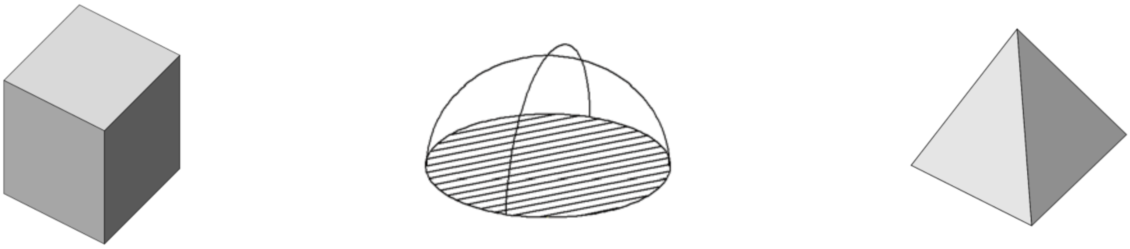
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m², *à son volume, mesuré en* m^3. *Le facteur de compacité* $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté *a*.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté *a*, et de hauteur verticale *a*.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme. Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k = 1, p_1 = p, q_1 = q$.
Tant que $p_k \neq 0$

> Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.
>
> Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.
>
> Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.

Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$

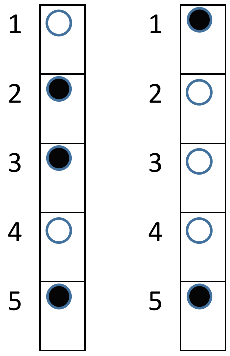
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\ldots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

Demi-tour !

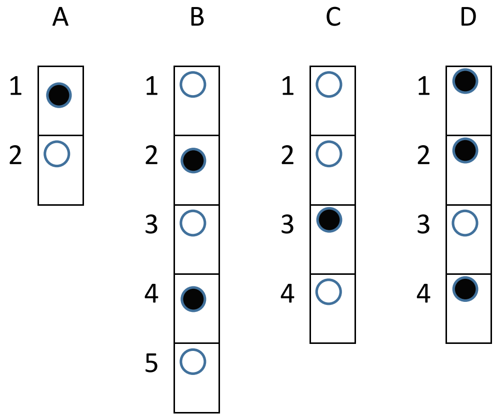


Avant Après

On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?



2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.

4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

Pour k allant de n à 1 par pas de -1

Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton

Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

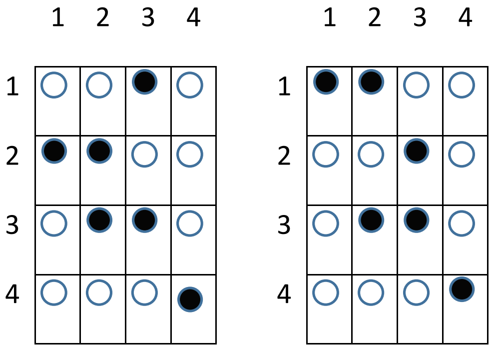
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en proposant des variantes :

a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1, 1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de Créteil

Mercredi 16 mars de 10 h 10 à 12 h 10

Exercices académiques

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant la fin de la première heure.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Les candidats traitent les **deux exercices académiques.**

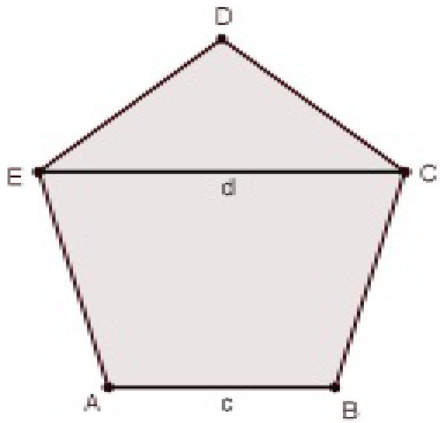
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Cousu de fil d'or

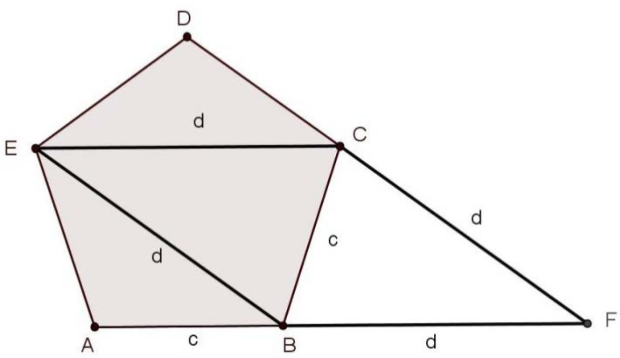
I] Aire d'un pentagone régulier :

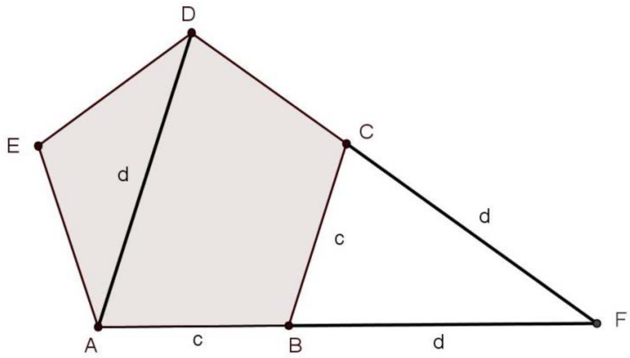
Considérons un pentagone régulier et notons c et d les longueurs respectives d'un côté et d'une diagonale. (figure ci-contre)



Dans un pentagone régulier, on a :

- Toutes les diagonales sont de même longueur.
- Chaque diagonale est parallèle à un côté du pentagone.
- Deux diagonales issues d'un même sommet forment un losange avec les prolongements des deux côtés qui leurs sont respectivement parallèles.





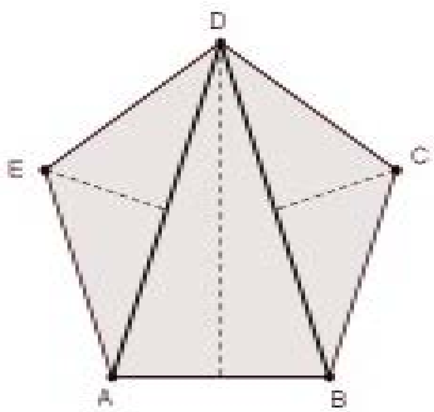
1. Justifier que $\dfrac{d}{c} = \dfrac{c}{d} + 1$.

2. On pose $\phi = \dfrac{d}{c}$ le rapport entre la longueur d'une diagonale et celle d'un côté du pentagone régulier.

a) Justifier que ϕ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

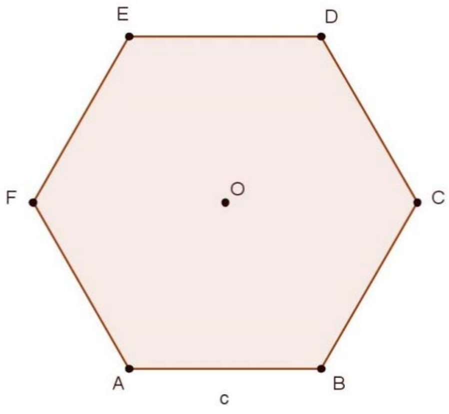
b) En déduire que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Afin de calculer l'aire d'un pentagone régulier on peut décomposer celui-ci en 3 triangles EAD, DAB et CBD. (figure ci-contre)



Démontrer que l'aire du pentagone ABCDE, en fonction de c et ϕ, est égale à $\dfrac{c^2}{4}\left(\sqrt{4\phi+3} + 2\phi\sqrt{3-\phi}\right)$.

II] Aire d'un hexagone :

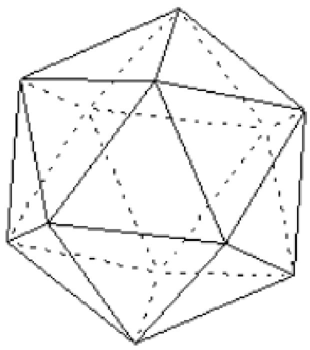


Considérons un hexagone régulier de centre O et notons c la longueur d'un côté.

Justifier que l'aire de cet hexagone est égale, en fonction de c, à $\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$.

III] Le ballon de foot :

L'icosaèdre est le polyèdre régulier qui possède le plus de faces (20 faces en formes de triangles équilatéraux qui se rejoignent par cinq à chaque sommet). Les angles de ses sommets sont trop pointus pour utiliser ce polyèdre comme ballon de foot, on décide alors d'amputer chaque arête du tiers de sa longueur de chaque côté. Les faces triangulaires initiales sont alors changées en hexagones, tandis que les morceaux enlevés autour de chaque sommet donnent naissance à des pentagones réguliers. Le polygone obtenu est un icosaèdre tronqué formé par **20 hexagones réguliers et 12 pentagones réguliers de même côté.**



Icosaèdre

Icosaèdre tronqué

ballon de foot
(Icosaèdre tronqué gonflé)

Les contraintes imposées par la réglementation internationale de football indiquent que la circonférence d'un ballon doit mesurer entre 68 cm et 70 cm.

Démontrer qu'il faut donc plus de 4 mètres de fil de couture pour assembler un tel ballon.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par tous les candidats)

Les élastiques

Un élastique circulaire souple et suffisamment grand posé à plat sur une feuille de papier peut être déformé successivement pour obtenir des nœuds et dont la trace sur la feuille est une courbe fermée plane comportant des nœuds, des arcs et des régions.

D'une étape à l'autre, on crée de nouveaux nœuds sans faire passer les arcs créés par les nœuds présents obtenus à l'étape précédente. La configuration ci-contre ne peut donc pas être réalisée.

Voici quelques exemples de déformation possibles.

a) 

b) 

c) 

On appelle :

- Nœud tout croisement de l'élastique.
- Boucle toute portion de l'élastique dont les extrémités sont un même nœud et qui n'en contient pas d'autre.
- Arc toute portion de l'élastique dont les extrémités joignent exactement deux nœuds et ne contenant aucune boucle ou autre nœud.
- Région toute surface fermée délimitée par :
    - Soit une boucle
    - Soit des arcs et ne contenant aucun arc en son intérieur

Par exemple :

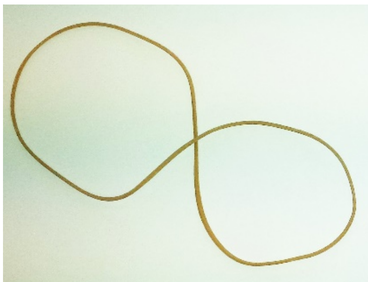
- La figure a) est composée d'un nœud, 2 boucles, 2 régions.
- La figure b) est composée de 3 nœuds, 6 arcs, 4 régions.

Partie A

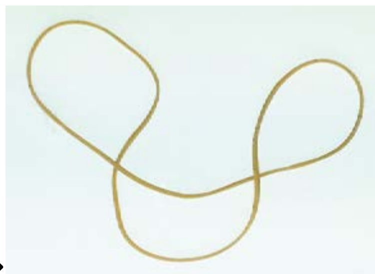
1. Déterminer le nombre de nœuds, boucles, arcs et régions de la figure c).

On ne s'autorise désormais que deux mouvements notés T et R.
T agit sur un arc ou une boucle par torsion en créant une boucle extérieure.

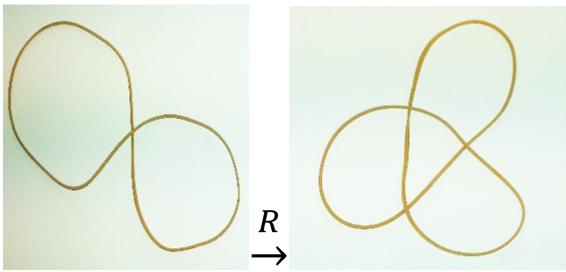
Exemple :



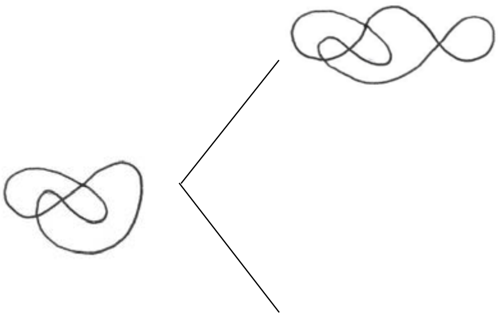
$\xrightarrow{T}$

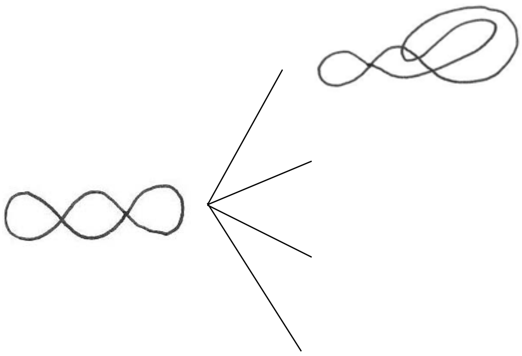


R agit sur une boucle par rabattement de celle-ci sur un arc périphérique ou sur une boucle de façon à l'intercepter en deux nouveaux points distincts.
Exemple :



2. Recopier puis compléter les deux arbres ci-dessous en représentant les déformations obtenues par application des mouvements T ou R sur l'arc ou la boucle de droite.





3. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des courbes obtenues à partir de la courbe a) par une succession de torsions T ou rabattements R effectuées dans un ordre quelconque mais compatible.
À chaque courbe X de $\mathcal{C}$ on associe un triplet (c, r, a) où :
- c désigne le nombre de nœuds ;
- r le nombre de régions ;
- a le nombre total d'arcs et boucles.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de rabattements R	Nombre de torsions T	c	r	a
1	0			
0	1			
2	3			
p	q			

b) Proposer une preuve des résultats énoncés dans la dernière ligne du tableau.

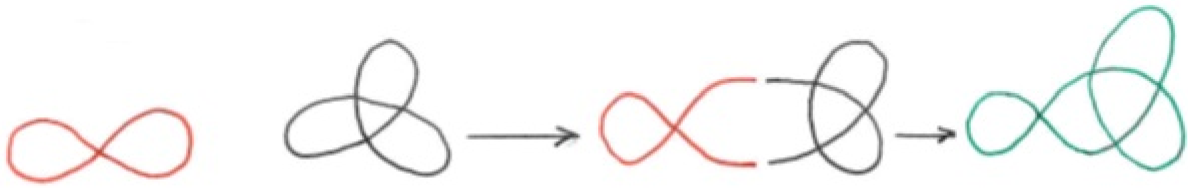
4. Déterminer une relation simple entre c, r et a valable pour tout $X \in \mathcal{C}$.
Justifier la réponse.

Partie B

Deux courbes X et X' de $\mathcal{C}$ étant données, on peut obtenir plusieurs nouvelles courbes, toutes notées $X * X'$ en procédant comme suit :

- On coupe au choix un arc ou une boucle périphérique de X de façon à obtenir deux extrémités libres, et on procède de même avec X'.
- On joint ensuite, sans les croiser, chacune des extrémités libres de X à celles de X'.

Exemple :



Soit X et X' deux courbes de $\mathcal{C}$ de triplets respectifs (c, r, a) et (c', r', a').
On note (c'', r'', a'') le triplet associé à $X * X'$.

1. Exprimer :
   - c'' en fonction de c et c' ;
   - r'' en fonction de r et r' ;
   - a'' en fonction de a et a'.

2. Soit $X \in \mathcal{C}$ de triplet (c, r, a).
   Pour tout entier $p \geq 2$, on note X^p une courbe représentant $X * X^{p-1}$.
   Déterminer le triplet associé à X^p en fonction de c, r, a et p.

3. Représenter une courbe de $\mathcal{C}$ telle que le nombre de nœuds de $((X^{16})^9)^7$ soit 2016.

4. Soit p un entier naturel tel que $2 \leq p \leq 2016$.
   Démontrer qu'il n'existe aucun $X \in \mathcal{C}$ tel que le nombre de nœuds de X^p soit 2017.

5. Démontrer que, pour tout $X \in \mathcal{C}$, il y a au moins deux régions comportant sur leurs contours le nombre de nœuds.