Niveau de classe : Première S

LE DESSOUS DE PLAT ARTICULÉ

Compétences mathématiques	• Géométrie : propriétés du losange, translation, symétries. • Fonction du second degré. • Mise en équation, résolution de système. • Géométrie analytique : calculs dans un repère. • Etude de fonction.
Compétences TICE	• Savoir construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique. • Savoir utiliser le mode trace d'un logiciel de géométrie dynamique. • Savoir tracer une courbe avec un logiciel de géométrie dynamique.
Compétences heuristiques	• Savoir poser une conjecture. • Savoir chercher des indices pour déterminer des nombres inconnus. • Exploitation de positions limites. • Savoir construire un protocole de consolidation d'une conjecture. • Savoir invalider une conjecture.

Scénario prévu

Durée :

- 2 heures en salle informatique.
- *ou* 1 heure en salle informatique + devoir à la maison.

Matériel requis :

- Un dessous de plat du modèle requis ou une maquette articulée fabriquée en Meccano.

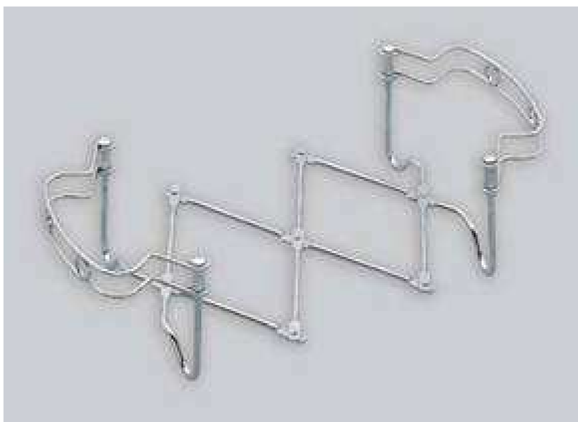
Logiciels utilisables :

Tout logiciel de géométrie dynamique pourvu d'un mode « trace ».

Début de l'activité – consignes :

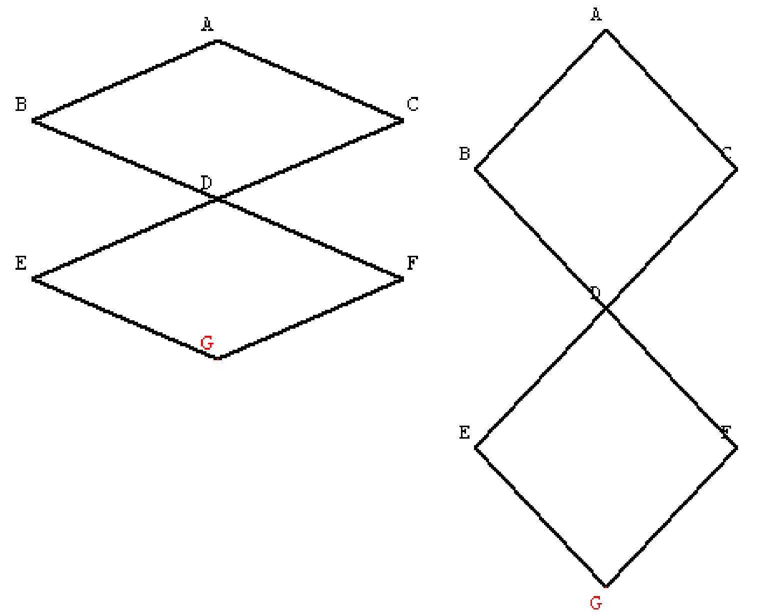
Présentation du problème (10 minutes)

Le professeur présente l'objet ci-contre, s'il en dispose, ou une maquette articulée de la partie centrale, réalisée à l'aide de pièces de type Meccano. Seule cette partie centrale sera l'objet de la séance.



On commence par analyser l'objet afin de procéder à une première mathématisation.
On mesure le dessous de plat (ou le professeur donne les informations) afin d'aboutir à la description : ABCD et DEFG sont des losanges, et D est le milieu de [BF].

Puis il accroche la structure en position verticale (en A) et tire sur l'extrémité inférieure (G) :



On (le professeur ou un élève) effectue plusieurs manipulations de traction, déplaçant G à la verticale de A.

Première question : le lieu de G

On constate que la manipulation est soumise à une contrainte physique, on peut donc se demander quel est l'ensemble des positions possibles pour le point G.
La réponse devrait être assez immédiate, obtenue à l'aide d'une manipulation de l'objet : G parcourt un segment de la verticale passant par A, de longueur 4AB.

Deuxième question : les lieux de B et de C

Une phase de manipulation de l'objet permet de conjecturer que ces points se déplacent sur un cercle. La validation de cette conjecture ne devrait pas poser de problème.

Troisième question : les lieux de E et de F

Cette fois la manipulation de l'objet ne permet sans doute pas de conclure, diverses conjectures peuvent être avancées :

- Deux segments parallèles
- Deux segments sécants
- Une parabole
- Un ovale
- …

Le recours à un logiciel de géométrie dynamique s'impose.

Consigne 1 :

Utilisez le logiciel … pour construire une figure articulée représentant l'objet.

Phases de l'activité – durées envisagées

1-Phase de recherche individuelle sur l'ordinateur (15 minutes)

Les élèves cherchent tout seuls ou par deux à construire la figure.

2-Phase de synthèse (15 minutes)

Lorsqu'il juge que le moment est venu, l'enseignant procède à une synthèse des procédures utilisées pour construire la figure, sans négliger celles qui n'ont pas abouti.

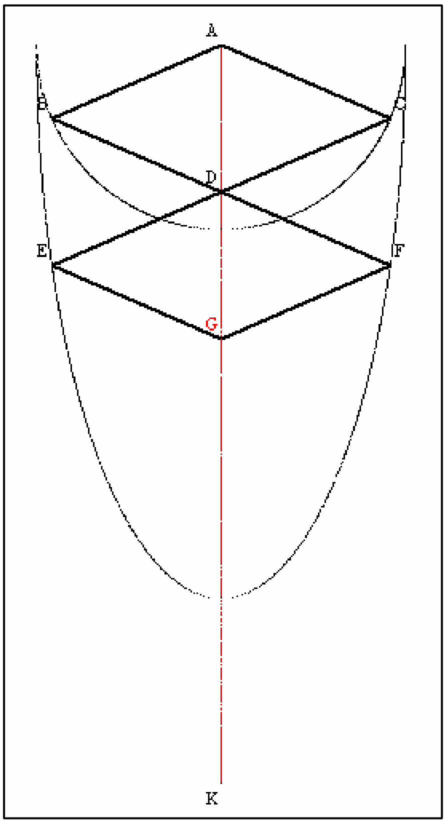
On peut s'attendre à voir :

- Placement de A (fixé) et de la verticale Δ passant par A, puis de B (libre), puis utilisation de la symétrie axiale d'axe Δ pour placer C, puis d'une translation, puis d'une symétrie centrale pour finir la figure.
- Placement de A (fixé) et de la verticale Δ passant par A, puis de B (libre), puis suite de la construction en utilisant des cercles.
- Placement de A (fixé) et de la verticale Δ passant par A, puis de G point libre sur Δ, puis de E milieu de [AG], puis de la médiatrice de [AG], de B point libre sur cette médiatrice, et des autres points à l'aide de symétries et de translations.
- Choix d'une unité : AB=1, puis placement de A(0,0), K(0,-4), G libre sur [AK], puis E milieu de [AG], B et C intersections de la médiatrice de [AG]et du cercle de centre A et de rayon 1,…

Cette dernière procédure est celle qui paraît la plus naturelle suite aux manipulations effectuées : il est normal de fixer A et de considérer G comme un point libre de la verticale puisque c'est ainsi que l'on a manipulé l'objet, en fixant A, en le disposant verticalement et en bougeant G.

3-Retour aux écrans : utilisation du mode trace (5 minutes)

La construction et l'utilisation du mode trace appliqué aux points B, C, E, F et G permettent de visualiser la figure ci-contre.



4-Synthèse (5 minutes)

La construction illustre les résultats déjà validés pour les lieux de G, B et C, et elle permet d'affiner la conjecture pour les lieux de E et de F : il ne s'agit pas de segments, on peut se demander s'il s'agit d'une parabole.

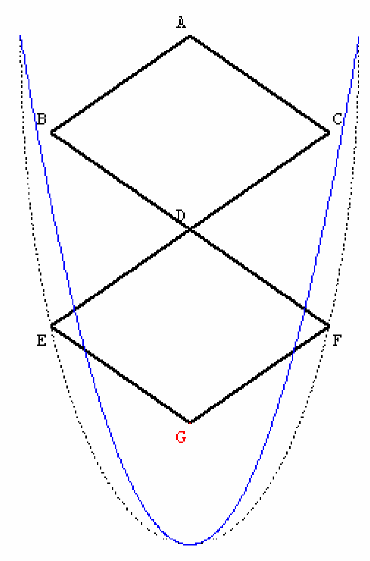
5-Phase collective d'exploration mathématique (10 minutes)

Le professeur propose alors de procéder à une étude analytique. Il amène la classe à l'étude suivante :

> Plaçons nous dans un repère.
> Le choix le plus commode consiste à considérer que l'on a A(0 ; 0) et K(0 ; -4).
> La parabole serait la représentation graphique d'une fonction dont l'expression est du type $f(x) = ax^2 + c$ car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
> En considérant les positions extrêmes (retour à la manipulation du logiciel ou de l'objet) on obtient les valeurs : $c = -3$ et $f(1) = 0$. On en déduit que la fonction aurait pour expression : $f(x) = 3x^2 - 3$.

6-Retour au logiciel (5 minutes)

On trace cette courbe sur la figure. (voir ci-contre)



Il apparaît que E et F ne « suivent » pas la parabole.
L'expression conjecturée n'est donc pas la bonne.

7-Retour aux mathématiques (20 minutes)

On note t l'ordonnée du point G. Soit I le milieu de [DG]

1. Calculer l'abscisse et l'ordonnée de I en fonction de *t*.
2. Calculer IF en fonction de *t*.
3. En déduire l'abscisse et l'ordonnée de F (puis de E) en fonction de *t*.
4. Montrer que les points E et F appartiennent à la courbe représentative de la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = -3\sqrt{1-x^2}$.

8-Retour au logiciel (5 minutes)

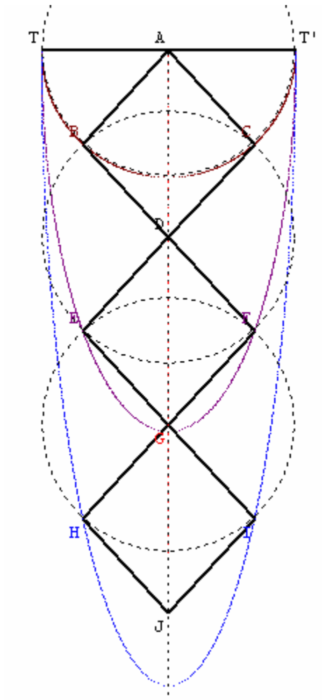
On trace cette courbe sur la figure.
On bascule en mode trace et on constate la confirmation du résultat.

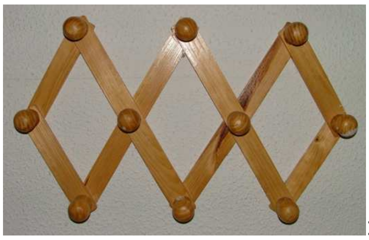
Remarques et précautions d'usage

- La phase 2 de recueil des procédures des élèves est très importante car elle permet d'analyser en profondeur les propriétés géométriques de l'objet. Cependant le professeur devra privilégier la quatrième procédure décrite afin de faciliter le travail analytique qui suit.
- Toutefois si le professeur souhaite privilégier le travail sur les fonctions, il peut guider la phase de construction en la faisant précéder d'une analyse collective de la figure.
- Il est possible que les élèves ne posent pas la conjecture suivant laquelle la courbe est une parabole, auquel cas la phase 5 n'aurait pas lieu.
- Il est possible que les élèves proposent d'autres fonctions qu'une fonction du second degré. Une étude analogue à celle qui est proposée pour la parabole peut être conduite en partant de la conjecture posée. Ce qui est intéressant c'est qu'une conjecture soit posée et démentie par l'expérimentation.

- La détermination de la fonction de second degré peut être amorcée en classe et terminée à la maison. On peut alors étudier davantage la fonction trouvée.
- Un scénario alternatif peut consister à arrêter l’activité en classe à l’issue de la phase 6 et à proposer les deux dernières phases en devoir à la maison.
- Jusqu’à la phase 6, l’activité peut être utilisée en seconde.
- On peut s’affranchir, sur le logiciel, de la contrainte physique qui interdit à G de dépasser A et regarder ce qui se passe si G « passe de l’autre côté ». On obtiendra ainsi une ellipse complète.
- Des prolongements possibles :

Le tire bouchon zigzag (ou le porte-manteau).



-  :

- Le dessous de plat à sept losanges