dérivée

TANGENTES PERPENDICULAIRES

1. Construction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

Soit A (a ; a^2) un point de $\mathscr{P}$.

On trace T_A la tangente en A à $\mathscr{P}$, puis on cherche s'il existe une droite D_A perpendiculaire à T_A et tangente à $\mathscr{P}$.

S'il existe, on note I le point d'intersection de T_A et D_A.

Recommencer avec d'autres positions pour le point A.

I existe –t-il toujours ?

Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points I ainsi définis ?

2. Démonstration

rappel : dans un repère orthonormé, deux droites d'équations $y = m\ x + p$ et $y = m'\ x + p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $m\ m' = -1$

2.1 Donner les expressions de $f\,'(x)$, $f(a)$ et $f\,'(a)$.

2.2 Donner l'équation de T_A et le coefficient directeur de D_A.

2.3 Supposons que D_A est tangente à $\mathscr{P}$ en B (b ; b^2). Donner une équation de D_A en fonction de a.

2.4 En déduire l'abscisse de I en fonction de a.

2.5 Conclure

2. Démonstration

2.1 $f'(x) = 2x$ $f(a) = a^2$

$f'(a) = 2a$

2.2 $T_A : y = f'(a)(x - a) + a^2$

$T_A : y = 2ax - a^2$

$D_A \perp T_A$ donc le coefficient directeur de D_A est $-\dfrac{1}{2a}$ si $a \neq 0$

2.3 D_A tangente en B à $\mathscr{P}$,

donc $y = 2bx - b^2$

donc $-\dfrac{1}{2a} = 2b$

d'où $D_A : y = -\dfrac{1}{2a}x - \dfrac{1}{16a^2}$

2.4 I est l'intersection de D_A et T_A donc $2a$

$x_I - a^2 = -\dfrac{1}{2a}x_I - \dfrac{1}{16a^2}$

$\left(2a + \dfrac{1}{2a}\right)x_I = a^2 - \dfrac{1}{16a^2}$

$x_I = \dfrac{4a^2 - 1}{8a}$

2.5 on en déduit que $y_I = \dfrac{1}{4}$

donc $\mathscr{E}$ est inclus dans la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$

<u>**Réciproquement**</u> : tous les points de la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$ sont-ils des points de $\mathscr{E}$?

Soit x_0 un réel et $M(x_0 ; -0,25)$. On cherche s'il existe un réel a tel que la droite (AM) (avec $A(a ; a^2)$) soit tangente à $\mathscr{P}$ en A.

il faut donc que le coefficient directeur de la droite (AM) soit lenombre dérivé en a.

$\dfrac{a^2 + 0,25}{a - x_0} = 2a$.

$a^2 - 2ax_0 - 0,25 = 0$

donc $a = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 1}$

donc a existe toujours.

$\mathscr{E}$ est la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$